Решение СЛАУ методом Гаусса, Крамера, обратной матрицы

Пример решения задачи по алгебре

Задача. 1. *Записать систему линейных алгебраических уравнений AX=B и решить ее тремя способами:*
а) с помощью обратной матрицы X=A-1·B, предварительно вычислив A-1. Сделать две проверки:
1) A-1·A=E;
2) подставить полученную матрицу-столбец X в исходное уравнение и убедиться, что A·X=B;
б) по правилу Крамера;
в) методом Гаусса.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Решение.
Система имеет вид:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=-2. \end{cases}$$

а) Решим систему с помощью обратной матрицы $X=A^{-1}\cdot B$, предварительно вычислив A^{-1}.

Найдем обратную матрицу по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^T$.

Определитель матрицы:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=2(4-4)-5(6-3)+3(12-6)=-15+18=3\neq 0.$$

Найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 7 \\ -1 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^{T}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 7 \\ -1 & 7 & -11 \end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ 6 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ 6 & 7 & -11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0\cdot 1+2\cdot 2-1\cdot(-2) \\ -3\cdot 1-5\cdot 2+7\cdot(-2) \\ 6\cdot 1+7\cdot 2-11\cdot(-2) \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4+2 \\ -3-10-14 \\ 6+14+22 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Сделаем две проверки:

1) $A^{-1}\cdot A=E;$

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ 6 & 7 & -11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0+6-3 & 0+4-4 & 0+2-2 \\ -6-15+21 & -15-10+28 & -9-5+14 \\ 12+21-33 & 30+14-44 & 18+7-22 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Верно.

2) подставим полученную матрицу-столбец X в исходное уравнение и убедимся, что $A\cdot X=B;$

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+5\cdot(-9)+3\cdot 14 \\ 3\cdot 2+2\cdot(-9)+1\cdot 14 \\ 3\cdot 2+4\cdot(-9)+2\cdot 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}=B.$$

Верно.

б) Решим систему по правилу Крамера;

$$A=\begin{pmatrix}2&5&3\\3&2&1\\3&4&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Вычислим дополнительные определители, подставляя столбец свободных членов, соответственно, на место первого, второго и третьего столбца основного определителя:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&5&3\\2&2&1\\-2&4&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&2\\-2&4\end{vmatrix}=$$

$$=1(4-4)-5(4+2)+3(8+4)=6.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&1&3\\3&2&1\\3&-2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3&1\\3&2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&2\\3&-2\end{vmatrix}=$$

$$=2(4+2)-1(6-3)+3(-6-6)=12-3-36=-27.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&5&1\\3&2&2\\3&4&-2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&2\\4&-2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3&2\\3&-2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}=$$

$$=2(-4-8)-5(-6-6)+1(12-6)=-24+60+6=42.$$

Тогда решение по формулам Крамера равно:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{3}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-27}{3}=-9,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{42}{3}=14.$$

Получили решение: $x_1=2,\ x_2=-9,\ x_3=14$.

в) Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x_1+5x_2+3x_3=1,\\3x_1+2x_2+x_3=2,\\3x_1+4x_2+2x_3=-2.\end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе, умноженное на 3.
Вычитаем из третьего уравнения второе, умноженное на 2.

$$\begin{cases}-7x_1-x_2=-5,\\3x_1+2x_2+x_3=2,\\-3x_1=-6.\end{cases}$$

Находим из последнего уравнения $x_1=2$ и подставляем в остальные:

$$\begin{cases}-14-x_2=-5,\\6+2x_2+x_3=2,\\x_1=2.\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -9, \\ 6 - 18 + x_3 = 2, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -9, \\ x_3 = 14, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = -9,\ x_3 = 14$.