

Тема: Пределы

ЗАДАНИЕ. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - x + 1} \right)^{3x+4}.$$

РЕШЕНИЕ.

Способ 1. Преобразуем выражение к экспоненте в сложной степени и вычислим предел, к которому стремится показатель степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - x + 1} \right)^{3x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(3x+4) \ln \left(\frac{3x^2+1}{3x^2-x+1} \right)} = A.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln A = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 4) \ln \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 4) \ln \left(1 + \frac{x}{3x^2 - x + 1} \right) =$$

Используем, что $\ln(1 + z)$ z при $z \rightarrow 0$. Здесь

$$\frac{x}{3x^2 - x + 1} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

так как старшая степень числителя (1) меньше степени знаменателя (2). Поэтому:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 4) \frac{x}{3x^2 - x + 1} = 1, \quad \Rightarrow A = e^1 = e.$$

Способ 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - x + 1} \right)^{3x+4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1 - x + x}{3x^2 - x + 1} \right)^{3x+4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{3x^2 - x + 1} \right) \left(\frac{3x^2 - x + 1}{x} \right) \left(\frac{x}{3x^2 - x + 1} \right)^{3x+4} = \end{aligned}$$

Используем второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{x(3x+4)}{3x^2 - x + 1} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{3x^2 + 4x}{3x^2 - x + 1} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{3 + 4/x}{3 - 1/x + 1/x^2} \right)} = e^1 = e.$$