

Составление двойственной задачи линейного программирования

ЗАДАНИЕ. Составить задачу, двойственную исходной задаче

$$F(x) = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 35, \\ 3x_1 + 5x_2 = 30, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Сначала запишем задачу в стандартном виде, так как она на максимум, ограничения неравенства приведем к виду \leq . Получим:

$$F(x) = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ -7x_1 - 10x_2 \leq -35, \\ 3x_1 + 5x_2 = 30, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Теперь составляем двойственную задачу.

Так как исходная задача была на максимум, двойственная задача будет на минимум, причем коэффициенты при переменных в целевой функции соответствуют правым частям ограничений, число переменных равно числу ограничений исходной задачи и равно трем.

Целевая функция двойственной задачи: $Z = 45y_1 - 35y_2 + 30y_3 \rightarrow \min$.

Строим ограничения, транспонируя матрицу коэффициентов в ограничениях.

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Так как все переменные были неотрицательны, все ограничения будут иметь знаки \geq .

$$\begin{cases} 6y_1 - 7y_2 + 3y_3 \geq, \\ 5y_1 - 10y_2 + 5y_3 \geq, \end{cases}$$

Правые части ограничений – это коэффициенты при переменных в исходной целевой функции.

$$\begin{cases} 6y_1 - 7y_2 + 3y_3 \geq 5, \\ 5y_1 - 10y_2 + 5y_3 \geq 2, \end{cases}$$

Первое и второе ограничения имеют знак \leq , соответствующие двойственные переменные неотрицательны, для переменной y_3 ограничений по знаку нет.

$$\begin{cases} 6y_1 - 7y_2 + 3y_3 \geq 5, \\ 5y_1 - 10y_2 + 5y_3 \geq 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ любое.} \end{cases}$$

Двойственная задача построена:

$$Z = 45y_1 - 35y_2 + 30y_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 6y_1 - 7y_2 + 3y_3 \geq 5, \\ 5y_1 - 10y_2 + 5y_3 \geq 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ любое.} \end{cases}$$