Решение задачи целочисленного программирования графическим методом и методом Гомори

ЗАДАНИЕ.

Найдите графическим методом и методом Гомори оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью:

$L(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_{1,2} \in Z^+. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Часть 1. Решим задачу графическим методом.

Построим область допустимых решений задачи, ограниченную неравенствами

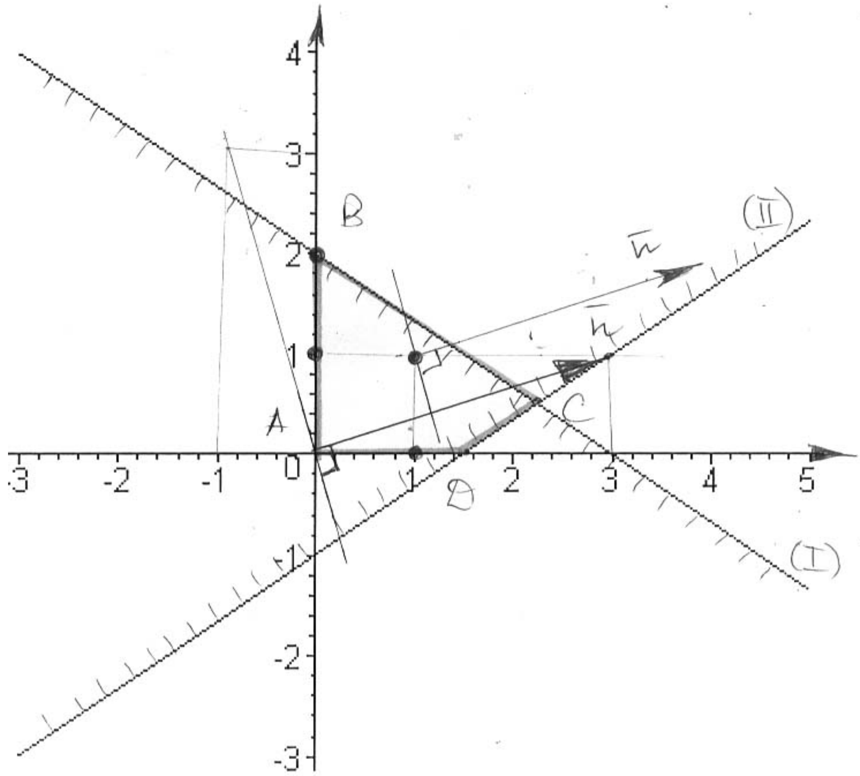
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_{1,2} \in Z^+. \end{cases}$$

Строим прямые:

(I) $2x_1 + 3x_2 = 6$, точки (3, 0), (0, 2).

(II) $2x_1 - 3x_2 = 3$, точки (3, 1), (0, -1).

Получаем ограниченную выпуклую область *ABCD* в первой четверти. Допустимые решения – все целочисленные точки, находящиеся внутри области (выделены точками).



Ищем $L(x)=3x_1+x_2 \to \max$. Строим линию уровня целевой функции $3x_1+x_2=0$ и вектор градиента $\bar{n}=(3,1)$. Двигаем линию уровня параллельно себе по направлению градиента – направлению возрастания функции (см. рисунок), пока не достигнем крайней допустимой точки области. Видно, что это произойдет в точке $(1;1)$.

Получаем оптимальное целочисленное решение $x_1=1,\ x_2=1,\ L_{\max}=(1;1)=3+1=4.$

Часть 2. Решим задачу методом Гомори.

$L(x)=3x_1+x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 6, \\ 2x_1-3x_2 \le 3, \\ x_{1,2} \in Z^+. \end{cases}$$

Для этого сначала решаем задачу симплекс-методом без ограничений целочисленности.

$L(x)=3x_1+x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 6, \\ 2x_1-3x_2 \le 3, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Приводим задачу к каноническому виду:

$L(x)=3x_1+x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_{1,2,3,4} \ge 0. \end{cases}$$

Строим симплекс-таблицу:

Базис	План	x1	x2	x3	x4
x3	6	2	3	1	0
x4	3	2	-3	0	1
L	0	-3	-1	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (x_1), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (x_4). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым). Аналогично будем повторять шаги.

Базис	План	x1	x2	x3	x4
x3	3	0	6	1	-1
x1	3/2	1	-3/2	0	1/2
L	9/2	0	-11/2	0	3/2

Базис	План	x1	x2	x3	x4
x2	1/2	0	1	1/6	-1/6
x1	9/4	1	0	1/4	1/4
L	29/4	0	0	11/12	7/12

В последней строке нет отрицательных оценок, поэтому оптимальное решение найдено:
$x_1 = 9/4$, $x_2 = 1/2$, $L_{\max} = 29/4$.

Продолжим решение, используя алгоритм Гомори.

Найдем целые части оптимального решения: $\left[\frac{9}{4}\right] = 2$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$.

Дробные части $\left\{\frac{9}{4}\right\} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$, $\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Выбираем переменную с наибольшей дробной частью, то есть x_2 (дробная часть 1/2).

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:
$0x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_4 \ge \frac{1}{2}$, откуда $\frac{1}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_4 - x_5 = \frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{6}x_3 - \frac{5}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$.

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x2	1/2	0	1	1/6	-1/6	0
x1	9/4	1	0	1/4	1/4	0
x5	-1/2	0	0	-1/6	-5/6	1
L	29/4	0	0	11/12	7/12	0

Переходим к следующей таблице:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x2	6/10	0	1	1/5	0	-1/5
x1	21/10	1	0	1/5	0	3/10
x4	3/5	0	0	1/5	1	-6/5
L	69/10	0	0	4/5	0	7/10

Получили нецелочисленное решение.
Выбираем переменную с наибольшей дробной частью, то есть x_2 (дробная часть 3/5).

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:
$\frac{1}{5}x_3+\frac{4}{5}x_4 \ge \frac{3}{5}$, откуда $\frac{1}{5}x_3+\frac{4}{5}x_4-x_6=\frac{3}{5}$ или $-\frac{1}{5}x_3-\frac{4}{5}x_4+x_6=-\frac{3}{5}$.

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x2	6/10	0	1	1/5	0	-1/5	0
x1	21/10	1	0	1/5	0	3/10	0
x4	3/5	0	0	1/5	1	-6/5	0
x6	-7/10	0	0	-1/5	0	-4/5	1
L	69/10	0	0	4/5	0	7/10	0

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x2	3/4	0	1	1/4	0	0	-1/4
x1	15/8	1	0	1/8	0	0	3/8
x4	3/2	0	0	1/2	1	0	-3/2
x5	3/4	0	0	1/4	0	1	-5/4
L	51/8	0	0	5/8	0	0	7/8

Получили нецелочисленное решение.
Выбираем переменную с наибольшей дробной частью, то есть x_1 (дробная часть 7/8).

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:
$\frac{1}{8}x_3+\frac{3}{8}x_6 \ge \frac{7}{8}$, откуда $\frac{1}{8}x_3+\frac{3}{8}x_6-x_7=\frac{7}{8}$ или $-\frac{1}{8}x_3-\frac{3}{8}x_6+x_7=-\frac{7}{8}$.

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x2	3/4	0	1	1/4	0	0	-1/4	0
x1	15/8	1	0	1/8	0	0	3/8	0

x4	3/2	0	0	1/2	1	0	-3/2	0
x5	3/4	0	0	1/4	0	1	-5/4	0
x7	-7/8	0	0	-1/8	0	0	-3/8	1
L	51/8	0	0	5/8	0	0	7/8	0

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x2	4/3	0	1	1/3	0	0	0	-2/3
x1	1	1	0	0	0	0	0	1
x4	5	0	0	1	1	0	0	-4
x5	11/3	0	0	2/3	0	1	0	-10/3
x6	7/3	0	0	1/3	0	0	1	-8/3
L	13/3	0	0	1/3	0	0	0	7/3

Получили нецелочисленное решение.
Выбираем переменную с наибольшей дробной частью, то есть x_5 (дробная часть 2/3).

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:
$\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_7 \geq \frac{2}{3}$, откуда $\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_7 - x_8 = \frac{2}{3}$ или $-\frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_7 + x_8 = -\frac{2}{3}$.

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
x2	4/3	0	1	1/3	0	0	0	-2/3	0
x1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
x4	5	0	0	1	1	0	0	-4	0
x5	11/3	0	0	2/3	0	1	0	-10/3	0
x7	7/3	0	0	1/3	0	0	1	-8/3	0
x8	-2/3	0	0	-2/3	0	0	0	-2/3	1
L	13/3	0	0	1/3	0	0	0	7/3	0

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
x2	1	0	1	0	0	0	0	-1	1/2
x1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
x4	4	0	0	0	1	0	0	-5	3/2
x5	3	0	0	0	0	1	0	-4	1
x6	2	0	0	0	0	0	1	-3	1/2
x3	1	0	0	1	0	0	0	1	-3/2
L	4	0	0	1/3	0	0	0	2	1/2

Получаем оптимальное целочисленное решение $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ L_{\max} = 4$.