Задача по теории графов с решением

Задание.

Требуется составить структурную матрицу для данного орграфа (или графа) и, методами булевой алгебры, найти все пути P_{ij} из вершины i в вершину j, затем найти все сечения S_{ij} между этими вершинами. В данном задании (чтобы исключить возможные неясности графического рисунка) указываются все ориентированные ребра, причем запись (2–4) означает, что 2 вершина связана с 4-й, а обратной связи нет. Напомним, что для нахождения путей из вершины i в вершину j нужно раскрывать минор структурной матрицы M_{ji} (вычеркивать из структурной матрицы строчку с номером j и столбец с номером i). Сечения же находятся отрицанием путей (конъюнкция меняется на дизъюнкцию и наоборот).

Дан орграф. Имеется 2 ориентированных ребра: (2–3) и (5–2); i=4, j=6.

Решение.

Составляем структурную матрицу S:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & b & a & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b} & 1 & c & 0 & 0 & d \\ \bar{a} & 0 & 1 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{e} & 1 & h & 0 \\ 0 & \bar{f} & 0 & \bar{h} & 1 & g \\ 0 & \bar{d} & 0 & 0 & \bar{g} & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем пути из вершины 4 в вершину 6, раскроем минор M_{64} (вычеркиваем строку 6 и столбец 4):

$$M_{64}=\begin{vmatrix} 1 & b & a & 0 & 0 \\ \bar{b} & 1 & c & 0 & d \\ \bar{a} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{e} & h & 0 \\ 0 & \bar{f} & 0 & 1 & g \end{vmatrix} = h\begin{vmatrix} 1 & b & a & 0 \\ \bar{b} & 1 & c & d \\ \bar{a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{f} & 0 & g \end{vmatrix} \vee 1\begin{vmatrix} 1 & b & a & 0 \\ \bar{b} & 1 & c & d \\ \bar{a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{e} & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=h\bar{f}\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ \bar{b} & c & d \\ \bar{a} & 1 & 0 \end{vmatrix} \vee hg\begin{vmatrix} 1 & b & a \\ \bar{b} & 1 & c \\ \bar{a} & 0 & 1 \end{vmatrix} \vee \bar{e}\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ \bar{b} & 1 & d \\ \bar{a} & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=h\bar{f}d\begin{vmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{vmatrix} \vee hg\bar{a}\begin{vmatrix} b & a \\ 1 & c \end{vmatrix} \vee hg\begin{vmatrix} 1 & b \\ \bar{b} & 1 \end{vmatrix} \vee \bar{e}\bar{a}\begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix}=$$

$= h\overline{f}d(1 \vee a\overline{a}) \vee hg\overline{a}(bc \vee a) \vee hg(1 \vee b\overline{b}) \vee \overline{e}\overline{a}bd =$

$= h\overline{f}d \vee hg\overline{a}(bc \vee a) \vee hg \vee \overline{e}\overline{a}bd =$

$= h\overline{f}d \vee hg \vee \overline{e}\overline{a}bd$

Получили три пути: $\Pi_{46} = h\overline{f}d \vee hg \vee \overline{e}\overline{a}bd$.

Теперь найдем сечения между этими вершинами, с помощью отрицания путей (будем опускать знаки отрицания над ребрами):

$S_{46} = \overline{\Pi}_{46} = \overline{h\overline{f}d \vee hg \vee \overline{e}\overline{a}bd} = (h \vee f \vee d)(h \vee g)(e \vee a \vee b \vee d) =$

$= (hh \vee fh \vee dh \vee hg \vee fg \vee dg)(e \vee a \vee b \vee d) =$

$= (h \vee fh \vee dh \vee hg \vee fg \vee dg)(e \vee a \vee b \vee d) =$

$= (h \vee fg \vee dg)(e \vee a \vee b \vee d) =$

$= he \vee fge \vee dge \vee ha \vee fga \vee dga \vee hb \vee fgb \vee dgb \vee hd \vee fgd \vee dgd =$

$= he \vee fge \vee dge \vee ha \vee fga \vee dga \vee hb \vee fgb \vee dgb \vee hd \vee fgd \vee gd =$

$= he \vee fge \vee ha \vee fga \vee hb \vee fgb \vee hd \vee gd.$