Аналитическая геометрия в пространстве
Пример решения задачи

Задача. *Найти расстояние от точки B (1, 2, 0) до прямой, заданной системой уравнений*

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем расстояние от точки $B(1,2,0)$ до прямой l, заданной в условии, по формуле: $d = \frac{\left|\overline{a} \times \overline{BN}\right|}{\left|\overline{a}\right|}$, где N - некоторая точка на прямой l, $\overline{a}$ – направляющий вектор прямой.

Найдем направляющий вектор прямой l как векторное произведение нормалей плоскостей $x - y + 2z - 3 = 0,\ x - y - 1 = 0.$:

$$\overline{a} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \{1; -1; 2\} \times \{1; -1; 0\} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(0+2) - \overline{j}(0-2) + \overline{k}(-1+1) = 2\overline{i} + 2\overline{j} = \{2; 2; 0\}.$$

Получили направляющий вектор прямой l: $\overline{a} = \{1; 1; 0\}$ (поделили на 2 для удобства).

Подберем точку N. Пусть $x = 1$, тогда из системы

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - y + 2z = 3, \\ 1 - y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

Получили $N(1; 0; 1)$, вектор $\overline{BN} = \{1-1; 0-2; 1-0\} = \{0; -2; 1\}$.

Векторное произведение:

$$\bar{a}\times\overline{BN}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}=\{1,-1,-2\}.$$

Тогда расстояние:

$$d=\frac{\left|\bar{a}\times\overline{BN}\right|}{\left|\bar{a}\right|}=\frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.