Аналитическая геометрия в пространстве
Пример решения задачи

Задача. *Найти точки M_1 и M_2 симметричные точке M относительно прямой L и плоскости Π.*

Дано: $M\ (11;7;6)$

уравнение прямой $L: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$,

уравнение плоскости Π: $x + y + z - 18 = 0$.

Решение.

1. Относительно прямой.

Сначала найдем проекцию точки M на прямую $L: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, точку M_0. Для этого напишем уравнение плоскости P, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой L:

$$1(x-11) + 2(y-7) + 3(z-6) = 0,$$
$$x - 11 + 2y - 14 + 3z - 18 = 0,$$
$$x + 2y + 3z - 43 = 0.$$

и найдем точку M_0 пересечения прямой $L: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ и плоскости

$x + 2y + 3z - 43 = 0$.

Для этого запишем уравнение прямой в параметрическом виде и подставим в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} x = t + 3, \\ y = 2t + 3, \\ z = 3t + 2. \end{cases}$$

$t+3+2(2t+3)+3(3t+2)-43=0,$
$t+3+4t+6+9t+6-43=0,$
$14t=43-15,$
$14t=28,$
$t=2.$

Получили точку

$$\begin{cases} x=5, \\ y=7, \\ z=8. \end{cases}$$

Получили $M_0(5;7;8)$.

Так как M_1 - искомая симметричная точка, то $\overline{MM_1}=2\overline{MM_0}$.

$\overline{MM_1}=(x-11;y-7;z-6)$, $\overline{MM_0}=(5-11;7-7;8-6)=(-6;0;2)$

Тогда

$$\begin{cases} x-11=-12, \\ y-7=0, \\ z-6=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=7, \\ z=10. \end{cases}$$

Искомая точка $M_1(-1;7;10)$.

2. Относительно плоскости.

Найдем уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(11;7;6)$ на плоскость $\Pi:\ x+y+z-18=0$. В качестве направляющего вектора такого перпендикуляра можно выбрать нормаль к плоскости, поэтому

$$L:\frac{x-11}{1}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-6}{1}$$

В параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = t + 11, \\ y = t + 7, \\ z = t + 6. \end{cases}$$

Найдем проекцию точки $M(11;7;6)$ на плоскость Π: $x + y + z - 18 = 0$ как точку пересечения данного перпендикуляра с плоскостью:

$$t + 11 + t + 7 + t + 6 - 18 = 0,$$
$$3t = 18 - 18 - 6,$$
$$t = -2.$$

Искомая точка M_0 имеет координаты:

$$\begin{cases} x_0 = 9, \\ y_0 = 5, \\ z_0 = 4. \end{cases}$$

$M_0(9;5;4)$.

Найдем точку $M_2(x, y, z)$, симметричную точке $M(11;7;6)$ относительно заданной плоскости. Точка $M_2(x, y, z)$ лежит на перпендикуляре L, так что

$$\begin{cases} x = t + 11, \\ y = t + 7, \\ z = t + 6. \end{cases}$$

Найдем параметр t из условия, что $\overline{MM_2} = 2\overline{MM_0}$ (M_0 - середина отрезка MM_2).

$\overline{MM_2} = \{t + 11 - 11; t + 7 - 7; t + 6 - 6\} = \{t; t; t\}$, $\overline{MM_0} = \{9 - 11; 5 - 7; 4 - 6\} = \{-2; -2; -2\}$,

откуда $t = -4$, значит:

$$\begin{cases} x = 7, \\ y = 3, \\ z = 2. \end{cases}$$

$M_2(7;3;2)$.