Аналитическая геометрия в пространстве
Пример решения задачи

Задача. *Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую J.* $M(-4,5,-2)$, $J: \frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{2}$.

Решение. Найдем проекцию точки $M(-4,5,-2)$ на прямую
$J: \frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{2}$.

Чтобы найти проекцию точки на прямую, проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную данной прямой, используя ее направляющий вектор, который будет вектором нормали к плоскости: $\bar{a}=\{1,2,2\}=\bar{n}$.
Получаем:

$1(x+4)+2(y-5)+2(z+2)=0$,

$x+4+2y-10+2z+4=0$,

$x+2y+2z-2=0$

Тогда искомая проекция (точка N) – это результат пересечения прямой и плоскости. Чтобы найти это пересечение, запишем параметрические уравнения

$$J: \begin{cases} x=t-3 \\ y=2t+4 \\ z=2t+2 \end{cases}$$

и подставим их в уравнение плоскости:

$t-3+2(2t+4)+2(2t+2)-2=0$,

$t-3+4t+8+4t+4-2=0$,

$9t=-7$,

$t=-7/9$,

$$N: \begin{cases} x = -7/9 - 3 = -34/9 \\ y = -14/9 + 4 = 22/9 \\ z = -14/9 + 2 = 4/9 \end{cases}$$

$N(-34/9, 22/9, 4/9)$ - проекция точки M на прямую J.

Тогда уравнение перпендикуляра – это уравнение прямой MN:

$$\frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M} = \frac{z - z_M}{z_N - z_M},$$

$$\frac{x+4}{-34/9+4} = \frac{y-5}{22/9-5} = \frac{z+2}{4/9+2},$$

$$\frac{x+4}{-34+36} = \frac{y-5}{22-45} = \frac{z+2}{4+18},$$

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{-23} = \frac{z+2}{22}.$$

Ответ: $\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{-23} = \frac{z+2}{22}$