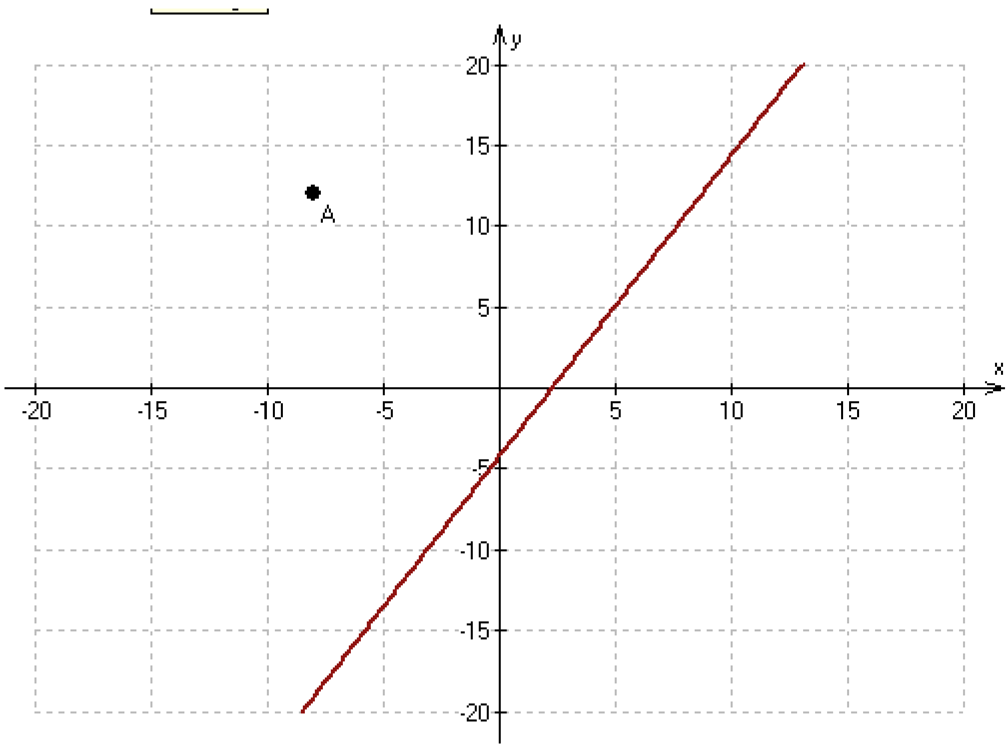
Аналитическая геометрия на плоскости
Пример решения задачи

Задача. *Найти координаты вершин квадрата, если известны координаты одной вершины (-8,12) и уравнение одной стороны* $y=\frac{13}{7}\cdot x-\frac{30}{7}$.

Решение. Найдем уравнения двух других сторон, проходящих через вершину $A(-8;12)$, одна из которых параллельна прямой $y=\frac{13}{7}\cdot x-\frac{30}{7}$, а другая – перпендикулярна.



Прямая AB:

$$y-12=\frac{13}{7}(x+8),$$

$$y=\frac{13}{7}x+\frac{13\cdot 8}{7}+12,$$

$$y=\frac{13}{7}x+\frac{188}{7}.$$

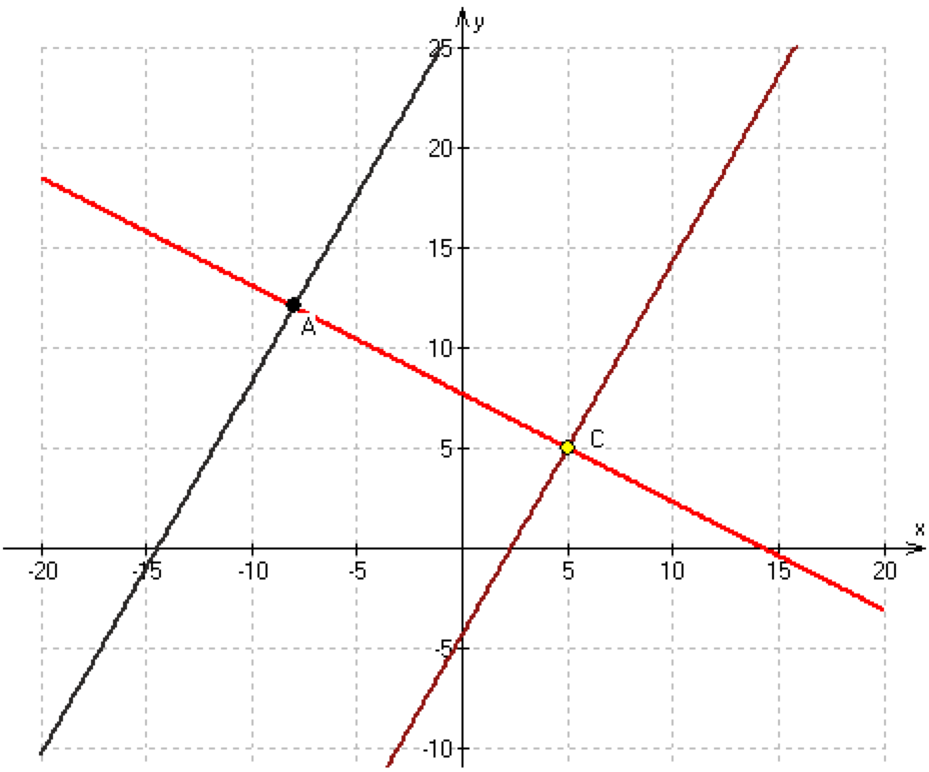
Прямая AC:

$$y-12=-\frac{7}{13}(x+8),$$
$$y=-\frac{7}{13}x-\frac{7\cdot 8}{13}+12,$$
$$y=-\frac{7}{13}x+\frac{100}{13}.$$

Найдем точку C:

$$-\frac{7}{13}x+\frac{100}{13}=\frac{13}{7}\cdot x-\frac{30}{7},$$
$$-\frac{7}{13}x-\frac{13}{7}x=-\frac{30}{7}-\frac{100}{13},$$
$$x=5,\ y=5.$$

Координаты $C(5;5)$.



Найдем длину стороны $AC=\sqrt{(5+8)^2+(5-12)^2}=\sqrt{13^2+7^2}=\sqrt{218}$.

Найдем координаты остальных двух вершин B,D, которые лежат на прямых $y=\frac{13}{7}\cdot x-\frac{30}{7}$ и $y=\frac{13}{7}x+\frac{188}{7}$, используя данные о длине сторон квадрата.

1) $y_B=\frac{13}{7}x_B+\frac{188}{7}$.

Тогда длина

$AB^2=(x_B+8)^2+\left(\frac{13}{7}x_B+\frac{188}{7}-12\right)^2=218,$
$x_1=-1,\ x_2=-15.$
$y_1=25,\ y_2=-1.$

Получили $B(-1;25)$ или $B(-15;-1)$ (так как квадрат можно было отложить двумя способами).

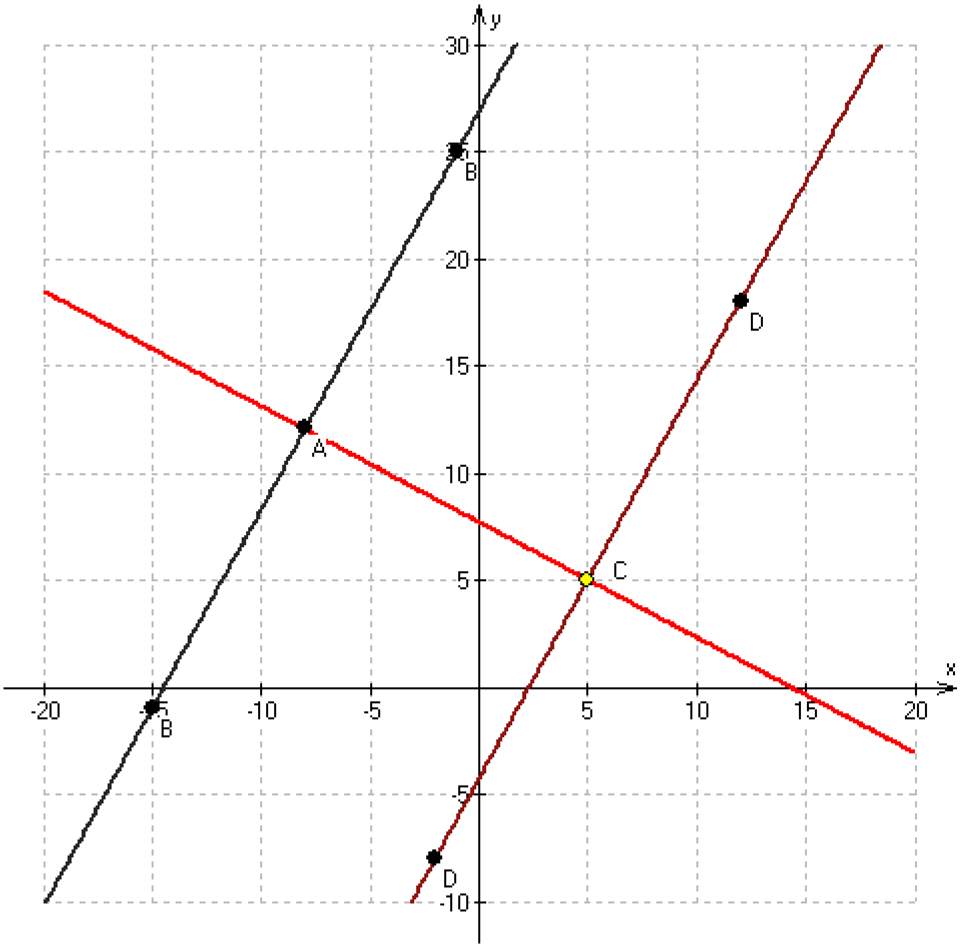
2) $y_D=\frac{13}{7}x_D-\frac{30}{7}$

Тогда длина

$CD^2=(x_D-5)^2+\left(\frac{13}{7}x_D-\frac{30}{7}-5\right)^2=218,$
$x_1=-2,\ x_2=12.$
$y_1=-8,\ y_2=18.$

Получили $D(-2;-8)$ или $D(12;18)$

Отображаем на чертеже:



Ответ:

1) $A(-8;12)$, $C(5;5)$, $B(-1;25)$, $D(12;18)$.

2) $A(-8;12)$, $C(5;5)$, $B(-15;-1)$, $D(-2;-8)$.