Тема: аналитическая геометрия в пространстве

ЗАДАНИЕ. *Найти проекцию точки* $P(4;1;2)$ *на плоскость* $4x+3z+3=0$, *а также вычислить координаты точки, симметричной точке* P *относительно заданной плоскости.*

РЕШЕНИЕ.

Найдем уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(4;1;2)$ на плоскость $4x+3z+3=0$. В качестве направляющего вектора такого перпендикуляра можно выбрать нормаль к плоскости, поэтому

$$L:\frac{x-4}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{3}$$

В параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=4t+4, \\ y=1, \\ z=3t+2. \end{cases}$$

Найдем проекцию точки $P(4;1;2)$ на плоскость $4x+3z+3=0$ как точку пересечения данного перпендикуляра с плоскостью:

$$4(4t+4)+3(3t+2)+3=0,$$

$$16t+16+9t+6+3=0,$$

$$25t=-25,$$

$$t=-1.$$

Искомая точка P_0 имеет координаты:

$$\begin{cases} x_0=-4+4=0, \\ y_0=1, \\ z_0=-3+2=-1. \end{cases}$$

$P_0(0,1,-1)$.

Найдем точку $P'(x',y',z')$, симметричную точке $P(4;1;2)$ относительно заданной плоскости. Точка $P'(x',y',z')$ лежит на перпендикуляре L, так что

$$\begin{cases} x'=4t'+4, \\ y'=1, \\ z'=3t'+2. \end{cases}$$

Найдем параметр t' из условия, что $\overline{PP'}=2\overline{PP_0}$ (P_0 - середина отрезка PP'). Получаем:

$$\begin{cases} 4t'+4-4=2\cdot(0-4), \\ 1-1=2\cdot(1-1), \\ 3t'+2-2=2(-1-2). \end{cases}$$

Отсюда $t'=-2$. Искомая точка

$$\begin{cases} x' = -8 + 4 = -4, \\ y' = 1, \\ z' = -6 + 2 = -4. \end{cases}$$

$P'(-4, 1, -4)$.