Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
©МатБюро - Решение задач по высшей математике

Тема: аналитическая геометрия в пространстве

Задание. *Пирамида ABCD задана координатами своих вершин:*

A(4, -1,0), B(2, 3, 4), C(-1, 4, 1), D(4, -3, 5).

Найдите:

1. *угол между ребрами AB и AC,*
2. *уравнение ребра AB,*
3. *уравнение грани ABC,*
4. *уравнение высоты, опущенной из вершины D, на грань ABC,*
5. *выясните, образуют ли векторы AB, AC, AD линейно независимую систему,*
6. *координаты вектора MN, если M – середина ребра AD, N – середина ребра BC,*
7. *разложите вектор MN по базису AB, AC, AD, если он таковым является.*

Решение.

Найдем координаты и длины векторов:

$$\overline{AB}=\{x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\}=\{2-4,3+1,4-0\}=\{-2,4,4\}.$$

$$\overline{AC}=\{x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A\}=\{-1-4,4+1,1-0\}=\{-5,5,1\}.$$

$$\overline{AD}=\{x_D-x_A,y_D-y_A,z_D-z_A\}=\{4-4,-3+1,5-0\}=\{0,-2,5\}.$$

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6.$$

$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{(-5)^2+5^2+1^2}=\sqrt{25+25+1}=\sqrt{51}.$$

$$\left|\overline{AD}\right|=\sqrt{0^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}.$$

1. Угол между ребрами AB и AC равен углу α между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, который можно найти по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{(-2)\cdot(-5)+4\cdot5+4\cdot1}{6\sqrt{51}}=\frac{10+20+4}{6\sqrt{51}}=\frac{17}{3\sqrt{51}},$$ откуда

$$\alpha=\arccos\left(\frac{17}{3\sqrt{51}}\right)\approx 21^\circ.$$

2. В качестве направляющего вектора для прямой AB можно выбрать вектор $\overline{AB}$, тогда канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_A}{-2}=\frac{y-y_A}{4}=\frac{z-z_A}{4},$$

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}.$$

3. Найдем векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 4 & 4\\ -5 & 5 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}4 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -5 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -5 & 5\end{vmatrix}=-16\bar{i}-18\bar{j}+10\bar{k}=\{-16,-18,10\}.$$

В качестве нормали к грани (плоскости) ABC можно выбрать вектор $\bar{n}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=\{-8,-9,5\}$. Так как плоскость проходит через точку $A(4,-1,0)$, получаем уравнение:

$$-8(x-x_A)-9(y-y_A)+5(z-z_A)=0,$$
$$-8(x-4)-9(y+1)+5(z)=0,$$
$$-8x+32-9y-9+5z=0,$$
$$-8x-9y+5z+23=0.$$

4. Так как высота $DH\perp ABC$, в качестве направляющего вектора DH можно выбрать нормаль к плоскости ABC: $\bar{n}=\{-8,-9,5\}$. Так как высота проходит через точку $D(4,-3,5)$, уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x-x_D}{-8}=\frac{y-y_D}{-9}=\frac{z-z_D}{5},$$

$$\frac{x-4}{-8}=\frac{y+3}{-9}=\frac{z-5}{5}.$$

5. Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\begin{vmatrix}-2 & 4 & 4\\ -5 & 5 & 1\\ 0 & -2 & 5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-5 & 5\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2(25+2)-4(-25)+4(10)=$$
$$=-54+100+40=86\neq 0,$$

поэтому вектора $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ образуют линейно независимую систему.

6. Найдем координаты точки M - середины AD:

$x_M=\frac{x_A+x_D}{2}=\frac{4+4}{2}=4$, $y_M=\frac{y_A+y_D}{2}=\frac{-1-3}{2}=-2$, $z_M=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{0+5}{2}=2,5$.

Получаем $M(4;-2;2,5)$.

Найдем координаты точки N - середины ребра BC:

$x_N=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2-1}{2}=0,5$, $y_N=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3+4}{2}=3,5$, $z_N=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{4+1}{2}=2,5$.

Получаем $N(0,5;\ 3,5;\ 2,5)$.

Тогда координаты вектора $\overline{MN}$ равны:

$\overline{MN}=\{x_N-x_M, y_N-y_M, z_N-z_M\}=\{0,5-4;\ 3,5+2;\ 2,5-2,5\}=\{-3,5;\ 5,5;\ 0\}$.

7. Разложим вектор $\overline{MN}$ по базису $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Пусть $\overline{MN}=x\cdot\overline{AB}+y\cdot\overline{AC}+z\cdot\overline{AD}$. Запишем это соотношение в виде системы (покоординатно):

$$\begin{cases}-2x-5y=-3,5\\4x+5y-2z=5,5\\4x+y+5z=0\end{cases}$$

Решим данную систему методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2&-5&0\\4&5&-2\\4&1&5\end{vmatrix}=86.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-3,5&-5&0\\5,5&5&-2\\0&1&5\end{vmatrix}=-3,5\begin{vmatrix}5&-2\\1&5\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}5,5&-2\\0&5\end{vmatrix}=-3,5(25+2)+5\cdot5,5\cdot5=43.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-2&-3,5&0\\4&5,5&-2\\4&0&5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}5,5&-2\\0&5\end{vmatrix}+3,5\begin{vmatrix}4&-2\\4&5\end{vmatrix}=-2\cdot5,5\cdot5+3,5(20+8)=43$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-2&-5&-3,5\\4&5&5,5\\4&1&0\end{vmatrix}=-3,5\begin{vmatrix}4&5\\4&1\end{vmatrix}-5,5\begin{vmatrix}-2&-5\\4&1\end{vmatrix}=-3,5(4-20)-5,5(-2+20)=$$
$$=3,5\cdot16-5,5\cdot18=-43.$$

Тогда по формулам Крамера:

$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{43}{86}=0,5$, $y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{43}{86}=0,5$, $z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-43}{86}=-0,5$,

То есть $\overline{MN}=0,5\cdot\overline{AB}+0,5\cdot\overline{AC}-0,5\cdot\overline{AD}$.