Тема: аналитическая геометрия в пространстве

ЗАДАНИЕ. *Даны координаты вершин пирамиды* $A(12;11;17)$, $B(14;12;14)$, $C(13;14;15)$, $D(12;21;12)$. *Найти:*
- *объем пирамиды;*
- *площадь грани* ABC*;*
- *уравнение плоскости, проходящей через точки* B,C,D*;*
- *длину высоты пирамиды, опущенной на грань* ABC.

РЕШЕНИЕ.

Найдем координаты векторов:
$\overline{AB}=\{14-12;12-11;14-17\}=\{2;1;-3\}$,
$\overline{AC}=\{13-12;14-11;15-17\}=\{1;3;-2\}$,
$\overline{AD}=\{12-12;21-11;12-17\}=\{0;10;-5\}$.

Вычислим смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}2&1&-3\\1&3&-2\\0&10&-5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-2\\10&-5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&-3\\10&-5\end{vmatrix}=2(-15+20)-(-5+30)=10-25=-15.$$

Тогда объем пирамиды равен: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\dfrac{15}{6}=2,5.$

Найдем векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\2&1&-3\\1&3&-2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1&-3\\3&-2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2&-3\\1&-2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}(-2+9)-\bar{j}(-4+3)+\bar{k}(6-1)=7\bar{i}+\bar{j}+5\bar{k}=\{7;1;5\}.$$

Тогда площадь грани $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{7^2+1^2+5^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{49+1+25}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}\approx 4,33.$

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки B,C,D по формуле:

$$\begin{vmatrix}x-x_C&y-y_C&z-z_C\\x_B-x_C&y_B-y_C&z_B-z_C\\x_D-x_C&y_D-y_C&z_D-z_C\end{vmatrix}=0.$$

Подставляем:

$$\begin{vmatrix} x-13 & y-14 & z-15 \\ 14-13 & 12-14 & 14-15 \\ 12-13 & 21-14 & 12-15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-13 & y-14 & z-15 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-13)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} - (y-14)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (z-15)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-13)(6+7) - (y-14)(-3-1) + (z-15)(7-2) =$$

$$= 13(x-13) + 4(y-14) + 5(z-15) =$$

$$= 13x + 4y + 5z - 169 - 56 - 75 = 13x + 4y + 5z - 300 = 0.$$

Получили уравнение плоскости $13x + 4y + 5z - 300 = 0$.

Найдем длину высоты пирамиды, опущенной на грань ABC. Для этого найдем уравнение плоскости ABC. Тогда в качестве нормали к плоскости ABC можно выбрать вектор $\overline{n} = \{7;1;5\}$. Уравнение плоскости примет вид:

$$7(x - x_A) + 1(y - y_A) + 5(z - z_A) = 0,$$

$$7(x-12) + 1(y-11) + 5(z-17) = 0,$$

$$7x + y + 5z - 84 - 11 - 85 = 0,$$

$$7x + y + 5z - 180 = 0.$$

Длина высоты – это расстояние от вершины $D(12;21;12)$ до плоскости ABC:

$$7x + y + 5z - 180 = 0.$$

$$DH = \frac{|7x_D + y_D + 5z_D - 180|}{\sqrt{49+1+25}} = \frac{|7\cdot 12 + 21 + 5\cdot 12 - 180|}{5\sqrt{3}} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1,73.$$