Составление платежной матрицы и решение игры

ЗАДАНИЕ.

Швейное предприятие реализуется свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует a *костюмов и* b *платьев, а при прохладной погоде - с костюмов и* d *платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны* α_0, *а платья -* β_0 *рублям, цена реализации соответственно равна* α_1 *рублей и* β_1 *рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.*

$a = 1000, b = 2300, c = 1400, d = 700,$
$\alpha_0 = 20, \beta_0 = 5, \alpha_1 = 40, \beta_1 = 12$.

РЕШЕНИЕ.

Составим математическую модель задачи. В связи с возможными состояниями спроса фирма располагает двумя стратегиями.

1. F_1 = (1000, 2300) – произвести 1000 костюмов и 2300 платьев,
2. F_2 = (1400, 700) - произвести 1400 костюмов и 700 платьев.

Природа (рынок) располагает также двумя стратегиями:

1. D_1 = погода теплая,
2. D_2 = погода прохладная.

Если фирма примет стратегию F_1 и спрос действительно будет находиться в первом состоянии, то есть погода будет теплой (D_1), то выпущенная продукция будет полностью реализована и доход составит
w_{11} =1000*(40-20) + 2300*(12-5) = 36100.

Если фирма примет стратегию F_1, а спрос будет находиться в состоянии D_2 (погода прохладная), то платья будут реализованы лишь частично, и доход составит:
w_{12} = 1000*(40-20) + 700*(12-5) – (2300-700)*5= 16900.

Аналогично, если фирма выберет стратегию F_2, а природа – стратегию D_1 (погода теплая), то доход составит (будут недораспроданы костюмы):
w_{21} =1000*(40-20) + 700*(12-5) – (1400-1000)*20= 16900,
а если природа выберет стратегию D_2, то
w_{22} = 1400*(40-20) + 700*(12-5) = 32900.

Рассматривая фирму и природу в качестве двух игроков, получим платежную матрицу игры

$$W = \begin{pmatrix} 36100 & 16900 \\ 16900 & 32900 \end{pmatrix}$$

которая будет служить игровой моделью задачи.

Поскольку максиминная стратегия игры составляет a = max (16900, 16900) = 16900, а минимаксная b = min (36100, 3290) = 32900, то цена игры лежит в диапазоне

16900 ден. ед. < v < 32900 ден. ед.

Решения игры в чистых стратегиях не существует, поэтому будем искать решение в смешанных стратегиях.

Решим данную игру аналитическим методом.

Средний выигрыш первого игрока, если он использует оптимальную смешанную стратегию $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, а второй игрок – чистую стратегию, соответствующую первому столбцу платежной матрицы, равен цене игры v:

$36100x_1^* + 16900x_2^* = v$.

Тот же средний выигрыш получает первый игрок, если второй игрок применяет стратегию, соответствующую второму столбцу платежной матрицы, то есть

$16900x_1^* + 32900x_2^* = v$.

Учитывая, что $x_1^* + x_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии первого игрока и цены игры:

$$\begin{cases} 36100x_1^* + 16900x_2^* = v, \\ 16900x_1^* + 32900x_2^* = v, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему и находим:

$$\begin{cases} x_1^* = 5/11, \\ x_2^* = 6/11, \\ v = 281900/11. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия фирмы:

$$P^* = x_1^* F_1 + x_2^* F_2 = \frac{5}{11}(1000, 2300) + \frac{6}{11}(1400, 700) = \left(\frac{13400}{11}; \frac{15700}{11}\right) \approx (1218; 1427)$$

Таким образом, фирме оптимально произвести 1218 костюмов и 1427 платьев.