

Функции нескольких переменных Частные производные

ЗАДАНИЕ.

Для функции $z(x, y)$ двух переменных, неявно заданной уравнением

$\sin(xz) + \cos(yz) = 1$, найдите первый и второй дифференциалы в точке

$x = y = 1, z = 0$.

РЕШЕНИЕ. Введем функцию $F(x, y, z) = \sin(xz) + \cos(yz) - 1 = 0$. Найдем ее частные производные:

$$F'_x = (\sin(xz) + \cos(yz) - 1)'_x = z \cos(xz),$$

$$F'_y = (\sin(xz) + \cos(yz) - 1)'_y = -z \sin(yz),$$

$$F'_z = (\sin(xz) + \cos(yz) - 1)'_z = x \cos(xz) - y \sin(yz).$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{z \cos(xz)}{x \cos(xz) - y \sin(yz)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-z \sin(yz)}{x \cos(xz) - y \sin(yz)} = \frac{z \sin(yz)}{x \cos(xz) - y \sin(yz)}$$

В точке $x = y = 1, z = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1;1;0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1;1;0) = 0, \quad \text{дифференциал равен: } dz(1;1;0) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0.$$

Найдем второй дифференциал. Вычисляем вторые производные.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = - \left(\frac{z \cos(xz)}{x \cos(xz) - y \sin(yz)} \right)'_x = \\ &= \frac{z \cos(xz)}{(x \cos(xz) - y \sin(yz))^2} (x \cos(xz) - y \sin(yz))'_x - \frac{(z \cos(xz))'_x}{x \cos(xz) - y \sin(yz)} = \\ &= \frac{z \cos(xz)}{(x \cos(xz) - y \sin(yz))^2} (\cos(xz) - x \sin(xz)(z + xz'_x) - y \cos(yz) yz'_x) - \\ &= \frac{(z'_x \cos(xz) - z \sin(xz)(z + xz'_x))}{x \cos(xz) - y \sin(yz)}. \end{aligned}$$

В точке $x = y = 1, z = 0$ получаем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 - 0 = 0$.

Далее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = - \left(\frac{z \cos(xz)}{x \cos(xz) - y \sin(yz)} \right)'_y = \\ &= \frac{z \cos(xz)}{(x \cos(xz) - y \sin(yz))^2} (x \cos(xz) - y \sin(yz))'_y - \frac{(z \cos(xz))'_y}{x \cos(xz) - y \sin(yz)} = \\ &= \frac{z \cos(xz)}{(x \cos(xz) - y \sin(yz))^2} (-x \sin(xz) xz'_y - \sin(yz) - y \cos(yz)(z + yz'_y)) - \\ &= \frac{(z'_y \cos(xz) - z \sin(xz) xz'_y)}{x \cos(xz) - y \sin(yz)}. \end{aligned}$$

В точке $x = y = 1, z = 0$ получаем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 - 0 = 0$.

Найдем последнюю производную:

Решение задачи по функциям нескольких переменных скачано с

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafnp

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{z \sin(yz)}{x \cos(xz) - y \sin(yz)} \right)'_y = \\ &= - \frac{z \sin(yz)}{(x \cos(xz) - y \sin(yz))^2} (x \cos(xz) - y \sin(yz))'_y + \frac{(z \sin(yz))'_y}{x \cos(xz) - y \sin(yz)} = \\ &= - \frac{z \sin(yz)}{(x \cos(xz) - y \sin(yz))^2} (-x \sin(xz) x z'_y - \sin(yz) - y \cos(yz) (z + y z'_y)) + \\ &+ \frac{(z'_y \sin(yz) + z \cos(yz) (z + y z'_y))}{x \cos(xz) - y \sin(yz)}.\end{aligned}$$

В точке $x = y = 1, z = 0$ получаем: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - 0 = 0$.

Таким образом, второй дифференциал также равен нулю в данной точке:

$$(dz)^2(1;1;0) = 0$$