

Функции нескольких переменных Частные производные

ЗАДАНИЕ.

Проверить справедливость теоремы о смешанных производных второго порядка.

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

РЕШЕНИЕ.

Вычисляем вторые смешанные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x^2 + y^2))'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x^2 + y^2))'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_y = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2)'_y = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2)'_x = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Смешанные производные равны, теорема проверена.