Функции нескольких переменных
Частные производные

Задание.

Найти частные производные второго порядка

$z=\sqrt{x^2-y^2}$

Решение.

Сначала найдем частные производные первого порядка.

Находим частную производную по x, считая y константой:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\left(x^2-y^2\right)_x'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Находим частную производную по y, считая константой x:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)_y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\left(x^2-y^2\right)_y'=\frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Теперь вычисляем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)_x'=\frac{x_x'\sqrt{x^2-y^2}-x\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)_x'}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}=\frac{1\sqrt{x^2-y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2-y^2\right)-x^2}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^3}=\frac{-y^2}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)_y'=-\frac{y_y'\sqrt{x^2-y^2}-y\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)_y'}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}=-\frac{1\sqrt{x^2-y^2}-y\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{\left(x^2-y^2\right)+y^2}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^3}=\frac{-x^2}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)_y'=-\frac{1}{2}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^3}\left(x^2-y^2\right)_y'=-\frac{1}{2}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^3}(-2y)=\frac{xy}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^3}.$$