Функции нескольких переменных
Экстремумы

Задание.

Исследовать на экстремум функцию $z = f(x,y)$, $(x,y) \in R^2$.

$z = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 5$.

Решение.

Находим стационарные точки. Вычисляем частные производные первого порядка и приравниваем к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^4 + xy + \dfrac{1}{2}y^2 + 5\right)'_x = 4x^3 + y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x^4 + xy + \dfrac{1}{2}y^2 + 5\right)'_y = x + y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1/2, \\ y = -1/2. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1/2, \\ y = 1/2. \end{cases}$$

Точки: $M_1(0;0)$, $M_2(1/2;-1/2)$, $M_3(-1/2;1/2)$.

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4x^3 + y\right)'_x = 12x^2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(4x^3 + y\right)'_y = 1, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x+y)'_y = 1.$$

Получаем матрицу вторых производных $B = \begin{pmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) В точке $M_1(0;0)$ получаем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0;0) = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

определитель которой равен:

$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$, значит, в этой точке нет экстремума.

2) В точке $M_2(1/2;-1/2)$ получаем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1/2;-1/2) = 3$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

определитель которой равен:

$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$, значит, в этой точке есть экстремум. Это минимум, так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3 > 0$.

3) В точке $M_3\left(-1/2;1/2\right)$ получаем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(-1/2;1/2\right)=3$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

определитель которой равен:

$|B|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3-1=2>0$, значит, в этой точке есть экстремум. Это минимум, так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=3>0$.

Получаем:

$z_{\min}=z\left(-1/2;1/2\right)=\frac{79}{16}$.

$z_{\min}=z\left(1/2;-1/2\right)=\frac{79}{16}$.