Решение задачи по функциям нескольких переменных скачано с https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafnp

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Функции нескольких переменных Экстремумы

Задание.

Исследовать на экстремум функцию $z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$z = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 5.$$

Решение.

Находим стационарные точки. Вычисляем частные производные первого порядка и приравниваем к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 5\right)_x^3 = 4x^3 + y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 5\right)_y^3 = x + y = 0; \\ \begin{cases} x = 0, & \begin{cases} x = 1/2, & \begin{cases} x = -1/2, \\ y = 0. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Точки: $M_1(0;0)$, $M_2(1/2;-1/2)$, $M_3(-1/2;1/2)$.

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4x^3 + y\right)_x^y = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(4x^3 + y\right)_y^y = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x + y\right)_y^y = 1.$$

Получаем матрицу вторых производных $B = \begin{pmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) В точке
$$M_1(0;0)$$
 получаем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0;0) = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

определитель которой равен:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$$
, значит, в этой точке нет экстремума.

2) В точке
$$M_2(1/2;-1/2)$$
 получаем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1/2;-1/2)=3$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

определитель которой равен:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$$
, значит, в этой точке есть экстремум. Это минимум, так как $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 3 > 0$.

Решение задачи по функциям нескольких переменных скачано с https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafnp

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

3) В точке
$$M_3\left(-1/2;1/2\right)$$
 получаем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(-1/2;1/2\right)=3$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

определитель которой равен:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$$
, значит, в этой точке есть экстремум. Это минимум, так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3 > 0$.

Получаем:

$$z_{\min} = z(-1/2;1/2) = \frac{79}{16}.$$

$$z_{\min} = z(1/2; -1/2) = \frac{79}{16}.$$