

Функции нескольких переменных Градиент, производная по направлению

ЗАДАНИЕ.

Найдите градиент, производную по направлению \vec{l} и матрицу Гессе в точке M заданной функции, где $u = f(x, y, z) = x^2z + z^2x^2 + y^3$, $\vec{l} = \{2; 1; -2\}$, $M(1; 3; 1)$.

РЕШЕНИЕ.

Вычисляем частные производные функции.

$$u'_x = (x^2z + z^2x^2 + y^3)'_x = 2xz + 2xz^2,$$

$$u'_y = (x^2z + z^2x^2 + y^3)'_y = 3y^2,$$

$$u'_z = (x^2z + z^2x^2 + y^3)'_z = x^2 + 2x^2z.$$

В точке $M(1; 3; 1)$ получаем:

$$u'_x(1; 3; 1) = 2 + 2 = 4,$$

$$u'_y(1; 3; 1) = 3 \cdot 3^2 = 27,$$

$$u'_z(1; 3; 1) = 1 + 2 = 3.$$

Тогда градиент функции u в точке $M(1; 3; 1)$ равен: $\nabla u(M) = \{4; 27; 3\}$.

Найдем производную по направлению $\vec{l} = \{2; 1; -2\}$ по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\nabla u \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\{4; 27; 3\} \cdot \{2; 1; -2\}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{8 + 27 - 6}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{29}{3}.$$

Найдем матрицу Гессе (матрицу вторых производных). Вычисляем вторые производные.

$$u''_{xx} = (2xz + 2xz^2)'_x = 2z + 2z^2,$$

$$u''_{yy} = (3y^2)'_y = 6y,$$

$$u''_{zz} = (x^2 + 2x^2z)'_z = 2x^2.$$

$$u'_{xy} = (2xz + 2xz^2)'_y = 0,$$

$$u''_{xz} = (2xz + 2xz^2)'_z = 2x + 4xz,$$

$$u''_{yz} = (3y^2)'_z = 0.$$

Получаем матрицу:

$$H = \begin{pmatrix} 2z + 2z^2 & 0 & 2x + 4xz \\ 0 & 6y & 0 \\ 2x + 4xz & 0 & 2x^2 \end{pmatrix}$$

В точке $M(1;3;1)$ получаем:

$$H(1;3;1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$