

Функции нескольких переменных Градиент, производная по направлению

ЗАДАНИЕ.

Найти производную функции $f(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора \vec{l} . Вычислить наибольшую скорость изменения функции в данной точке.

$$f = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}, \quad \vec{l} = \{4, 3, 0\}, \quad M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$$

РЕШЕНИЕ.

1) Найдем градиент функции $f = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$:

$$f'_x = \left(\sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}\right)'_x = \cos(x + 2y) + \frac{yz}{2\sqrt{xyz}} = \cos(x + 2y) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}},$$

$$f'_y = \left(\sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}\right)'_y = \cos(x + 2y) \cdot 2 + \frac{xz}{2\sqrt{xyz}} = 2\cos(x + 2y) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{xz}{y}},$$

$$f'_z = \left(\sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}\right)'_z = \frac{xy}{2\sqrt{xyz}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}.$$

Градиент функции (направление наибольшего роста): $\text{grad } f = (f'_x; f'_y; f'_z)$.

Вычислим значения в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$

$$f'_x\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right) = \cos\left(\frac{7}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9\pi \cdot 2}{2 \cdot \pi}} = \frac{3}{2},$$

$$f'_y\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right) = 2\cos\left(\frac{7}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3\pi}} = \frac{1}{2},$$

$$f'_z\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi^2 \cdot 1}{4 \cdot 3}} = \frac{\pi}{4}.$$

В точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$ градиент равен: $\text{grad } f(M_0) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Наибольшая скорость изменения функции в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$ - это модуль

вектора градиента:

$$v_{\max} = |\text{grad } f(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 40}}{4} \approx 1,766..$$

2) Производная функции $f = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 3\right)$ по

направлению вектора $\vec{l} = \{4, 3, 0\}$ равна:

$$\frac{\partial f}{\partial(\vec{l})} = \frac{\text{grad } f(M_0) \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\left\{\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}\right\} \cdot \{4; 3; 0\}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{6 + \frac{3}{2} + 0}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{2}.$$