Пример решения по функциональному анализу

Задание. Пусть $\varphi(t)$ - непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в себя. Доказать, что оператор композиции $A\in B(C[0,1])$, $(Ax)(t)=x(\varphi(t))$ является компактным в $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t)\equiv const$.

Решение: Докажем, что множество функций из единичного шара, то есть множество функций $x(t), |x(t)| \le 1$ для $t \in [0,1]$, переводится оператором A в множество, не являющееся равностепенно непрерывным, если $\varphi(t) \ne const$.

Действительно, в этом случае можно найти точки $t_1, t_2 \in [0,1]$, достаточно близкие друг к другу (модуль разности $|t_1 - t_2|$ меньше любого наперед заданного числа $\delta > 0$) и такие, что $\varphi(t_0) \ne \varphi(t_1)$. Если это не так, то любые две точки $t', t'' \in [0,1]$ можно дополнить до последовательности $t', t_0, \dots, t_n, t''$, расстояние между соседними точками этой последовательности меньше δ и поэтому $\varphi(t') = \varphi(t_0) = \dots = \varphi(t_n) = \varphi(t'')$, то есть $\varphi(t) \equiv const$, что противоречит предположению.

Далее, можно найти непрерывную функцию x, по модулю сверху ограниченную единицей и такую, что $x(\varphi(t_1)) = 0, x(\varphi(t_2)) = 1$. Например, ее можно построить так: на отрезке между $\varphi(t_1)$ и $\varphi(t_2)$ положить $x(s) = \frac{s-\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}$, а на остальной части отрезка [0,1] продолжить константами, нулем и единицей.

Таким образом, мы получаем, что существует ε (равное, например, 1) такое, что для любого $\delta > 0$ существуют точки $t_1, t_2 \in [0,1]$ и функция x из единичного шара в пространстве $C[0,1]$, для которых выполнено $|x(\varphi(t_1)) - x(\varphi(t_2))| = 1.$ Следовательно, множество функций $\{Ax(t)\}$ не является равностепенно непрерывным. Это означает по теореме Асколи-Арцелы, что множество $\{Ax(t)\}$ не является предкомпактным. Значит, оператор А некомпактен.

Если же $\varphi(t) \equiv s = \mathrm{const}$, то $Ax(t) = x(s) \in [-1,1]$ для функций x(t) из единичного шара. Значит, для всех функций x из единичного шара получим ограниченный набор чисел $\{x(s)\}$, который является предкомпактным, так как любое ограниченное множество чисел предкомпактно. Следовательно, в этом случае оператор А компактен.