Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Решить уравнение* $(y^4-2x^3y)\,dx+(x^4-2xy^3)\,dy=0$.

Решение. Функции $M(x,y)=y^4-2x^3y$ и $N(x,y)=x^4-2xy^3$ являются однородными степени 4, поэтому имеем однородное уравнение. Делаем замену $y=tx$, $t=t(x)$, тогда $dy=x\,dt+t\,dx$, подставляем:

$$(t^4x^4-2x^3xt)\,dx+(x^4-2xx^3t^3)\,(x\,dt+t\,dx)=0,\quad (t^4-2t)\,dx+(1-2t^3)\,(x\,dt+t\,dx)=0,$$

$$(t^4+t)\,dx-(1-2t^3)x\,dt=0.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-2t^3}{t+t^4}dt,\quad \int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3t^2}{1+t^3}\right)dt,$$

$$\ln|x|=\ln|t|-\ln|1+t^3|+\ln|\widetilde{C}|,\quad x(1+t^3)=\widetilde{C}t\ (\widetilde{C}\neq 0).$$

Возвращаемся от t к y, получаем

$$x\left(1+\frac{y^3}{x^3}\right)=\widetilde{C}\frac{y}{x},\quad x^3+y^3=\widetilde{C}xy.$$

При делении на $t+t^4$ могли быть потеряны решения $t=0$ $(y=0)$ и $t=-1$ $(y=-x)$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это действительно решения, $y=-x$ содержится в общем интеграле при $\widetilde{C}=0$. Получаем что общее решение уравнения дается формулами $x^3+y^3=\widetilde{C}xy$, $y=0$, где $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная.