Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

ЗАДАНИЕ. *Решить дифференциальное уравнение:* $y''+4y'+4y=xe^{2x}$.

РЕШЕНИЕ.

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Сначала решим соответствующее однородное уравнение $y''+4y'+4y=0$. Составляем соответствующее характеристическое уравнение:

$k^2+4k+4=0,$

$(k+2)^2=0,$

$k_1=-2,\ k_2=-2.$

Корни одинаковые и вещественные (кратность 2). Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.}(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части.

$f=xe^{2x}$. Будем искать его в виде $y=(Ax+B)e^{2x}$. Найдем производные:

$y'=(A+2Ax+2B)e^{2x}$, $\quad y''=(2A+2A+4Ax+4B)e^{2x}=(4A+4Ax+4B)e^{2x}$.

Подставляем в уравнение:

$(4A+4Ax+4B)e^{2x}+4(A+2Ax+2B)e^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}=xe^{2x},$

$4A+4Ax+4B+4A+8Ax+8B+4Ax+4B=x,$,

$4A+4Ax+4B+4A+8Ax+8B+4Ax+4B=x,$

$(8A+16B)+16Ax=x,$

Приравниваем коэффициенты при степенях x справа и слева:

$$\begin{cases}16A=1,\\ 8A+16B=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=1/16,\\ B=-1/32.\end{cases}$$

Поэтому частное решение $y=\left(\frac{1}{16}x-\frac{1}{32}\right)e^{2x}=\frac{1}{32}(2x-1)e^{2x}$.

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения равно:

$y_{о.н.}(x)=y_{о.о.}+y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\frac{1}{32}(2x-1)e^{2x}$.

ОТВЕТ. $y_{о.н.}(x)=y_{о.о.}+y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\frac{1}{32}(2x-1)e^{2x}$.