

**Тема: Дифференциальные уравнения**

**ЗАДАНИЕ.** *Скорость остывания нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. За 10 минут тело охладилось от  $100^\circ$  до  $60^\circ$ . Температура среды постоянна и равна  $20^\circ$ . Когда тело остынет до  $25^\circ$ ?*

**РЕШЕНИЕ.** Искомая функция  $y(t)$  — температура тела через  $t$  минут после начала охлаждения. Скорость охлаждения это производная функции  $y'(t)$ . По условию

$$-y'(t) = k(y(t) - 20), \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности (пока неизвестный). Также известно, что  $y(0) = 100$ ,  $y(10) = 60$ . Решая уравнение (1), получаем

$$\frac{dy}{y-20} = -k dt, \quad \ln(y-20) = -kt + \ln C, \quad y = 20 + Ce^{-kt}.$$

Из условий  $y(0) = 100$ ,  $y(10) = 60$  находим  $k$  и  $C$ :

$$100 = 20 + Ce^0, \Rightarrow C = 80, \quad 60 = 20 + 80e^{-10k}, \Rightarrow k = \frac{1}{10} \ln 2.$$

Тогда

$$y(t) = 20 + 80e^{-\frac{t}{10} \ln 2} = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}.$$

Найдем, когда тело остынет до  $20^\circ$ :

$$y(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} = 25, \quad 2^{-\frac{t}{10}} = \frac{1}{16}, \quad t = 40.$$

**ОТВЕТ:** через 40 минут.