Тема: Динамическое программирование

ЗАДАНИЕ. Для двух предприятий выделено a единиц средств. Как распределить все средства в течение 4 лет, чтобы доход был наибольшим, если известно, что доход от x единиц средств, вложенных в первое предприятие, равен $f_1(x)$, а доход от y единиц средств, вложенных во второе предприятие, равен $f_2(y)$. Остаток средств к концу года составляет $g_1(x)$ для первого предприятия и $g_2(y)$ для второго предприятия. Задачу решить методом динамического программирования.

a	f_1	g_1	f_2	g_2
1000	3x	0,1x	2y	0,5y

РЕШЕНИЕ. Процесс распределения средств разобьем на 4 этапа – по соответствующим годам.

Обозначим $a_k = x_k + y_k$ - средства, которые распределяются на k–ом шаге как сумма средств по предприятиям.

Суммарный доход от обоих предприятий на k–ом шаге:

$$z_k = f_1(x_k) + f_2(a_k - x_k) = 3x_k + 2(a_k - x_k) = 2a_k + x_k$$

Остаток средств от обоих предприятий на k–ом шаге:

$$a_{k+1} = g_1(x_k) + g_2(a_k - x_k) = 0{,}1x_k + 0{,}5(a_k - x_k) = 0{,}5a_k - 0{,}4x_k$$

Обозначим $z_k^*(a_k)$ - максимальный доход, полученный от распределения средств a_k между двумя предприятиями с k-го шага до конца рассматриваемого периода.

Рекуррентные соотношения Беллмана для этих функций

$$z_4^*(a_4) = \max_{0 \le x_4 \le a_4} \{2a_k + x_k\}$$

$$z_k^*(a_k) = \max_{0 \le x_k \le a_k} \{2a_k + x_k + z_{k+1}^*(0{,}5a_k - 0{,}4x_k)\}$$

Проведем оптимизацию, начиная с четвертого шага:

4-й шаг.

Оптимальный доход равен: $z_4^*(a_4) = \max_{0 \le x_4 \le a_4} \{2a_k + x_k\} = 3a_4$, т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т.е. при $x_4 = a_4$.

3-й шаг.

$z_3^*(a_3) = \max\limits_{0 \le x_3 \le a_3} \{2a_3 + x_3 + 3(0{,}5a_3 - 0{,}4x_3)\} = \max\limits_{0 \le x_3 \le a_3} \{3{,}5a_3 - 0{,}2x_3)\} = 3{,}5a_3$, т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при $x_3 = 0$.

2-й шаг.

$z_2^*(a_2) = \max\limits_{0 \le x_2 \le a_2} \{2a_2 + x_2 + 3{,}5(0{,}5a_2 - 0{,}4x_2)\} = \max\limits_{0 \le x_2 \le a_2} \{3{,}75a_2 - 0{,}4x_2)\} = 3{,}75a_2$, т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при $x_2 = 0$.

1-й шаг.

$z_1^*(a_1) = \max\limits_{0 \le x_1 \le a_1} \{2a_1 + x_1 + 3{,}75(0{,}5a_1 - 0{,}4x_1)\} = \max\limits_{0 \le x_1 \le a_1} \{3{,}875a_1 - 0{,}5x_1)\} = 3{,}875a_1$ т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при $x_1 = 0$.

Результаты оптимизации:

$$z_1^*(a_1) = 3{,}875a_1; \quad x_1^* = 0$$
$$z_2^*(a_2) = 3{,}75a_2; \quad x_2^* = 0$$
$$z_3^*(a_3) = 3{,}5a_3; \quad x_3^* = 0$$
$$z_4^*(a_4) = 3a_4; \quad x_4^* = a_4$$

Определим количественное распределение средств по годам:

Т.к. $a_1 = a = 1000$, $x_1^* = 0$, получаем $a_2 = 0{,}5a_1 - 0{,}4x_1 = 500$. Далее аналогично:

$x_2^* = 0$, $a_3 = 0{,}5a_2 - 0{,}4x_2 = 250$

$x_3^* = 0$, $a_4 = 0{,}5a_3 - 0{,}4x_3 = 125$

$x_4^* = a_4 = 125$

Представим распределение средств в виде таблицы:

предприятие	год			
	1	2	3	4
1	0	0	0	125
2	1000	500	250	0

При таком распределении средств за 4 года будет получен доход, равный

$$z_{\max}^* = z_1^*(a_1) = 3{,}875 \cdot 1000 = 3875$$