Задача с решением по численным методам
Тема: решение систем линейных уравнений методом Зейделя

Задание.

1) Методом Зейделя решите с точностью 0,001 систему линейных уравнений, приведя ее к виду с диагональным преобладанием, а затем к виду удобному для итераций.
2) Полученное решение используйте для вычисления невязки каждого уравнения.
3) Все полученные приближения решения системы привести в итоговом отчете.
4) Не забываем начинать отчет с формулировки задания.

$$\begin{cases} 3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2 \\ 1.9x_1 + 3.1x_1 + 2.1x_3 = 2.1 \\ 7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6 \end{cases}$$

Решение.

Для обеспечения сходимости необходимо добиться выполнения условия диагонального преобладания элементов матрицы (модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов).

Приведем систему к виду:

$$\left\{ \begin{array}{c} 5.6x_1 + 0.7x_2 + 2.7x_3 = 3.5 \\ 0.6x_1 + 4.9x_2 + 1.1x_3 = -3.1 \\ 0.006x_1 - 0.002x_2 + 0.375x_3 = 1.582 \end{array} \right| \begin{array}{c} III - II \\ 2 \cdot I + II - III \\ -0.63 \cdot I + 0.36 \cdot II + 0.17 \cdot III \end{array}$$

Процесс Зейделя для этой системы сходится.

Приведем систему к виду

$$\begin{cases} x_1 = -0.125x_2 - 0.482143 + 0.625 \\ x_2 = -0.122449x_1 - 0.224490x_2 - 0.632653 \\ x_3 = -0.016x_1 + 0.005333x_2 + 4.218667 \end{cases}$$

$$x = A'x + F'$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -0.125 & -0.482143 \\ -0.122449 & 0 & -0.224490 \\ -0.016 & 0.005333 & 0 \end{pmatrix}; \quad F' = \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.632653 \\ 4.218667 \end{pmatrix}$$

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

В качестве начального приближения к решению выберем $x^0 = F'$, критерием достижения заданной точности положим: $\max_i\left(\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right|\right) < 0.001$.

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	0,625000	-1,329918	-1,238509	- 1,235983	-1,235968
$x_2^{(k)}$	-0,632653	-1,416854	-1,431127	- 1,431091	-1,431084

$x_3^{(k)}$	4,218667	4,232389	4,230850	4,230810	4,230810
$\Delta_1^{(k)}$		1,954918	0,091409	0,002526	0,0000149
$\Delta_2^{(k)}$		0,784200	0,014273	0,000036	0,0000072
$\Delta_3^{(k)}$		0,013722	0,001539	0,000040	0,0000002
$\max\left\{\Delta_i^{(k)}\right\}$		1,954918	0,091409	0,002526	0,0000149

Итак, требуемая точность достигнута, приближенное решение:

$$x \approx \begin{pmatrix} -1.2340 \\ -1.4311 \\ 4.2308 \end{pmatrix}$$

Вычислим невязки:

$$r = F - Ax = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2.1 \\ 5.6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.1 & 2.8 & 1.9 \\ 1.9 & 3.1 & 2.1 \\ 7.5 & 3.8 & 4.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.2340 \\ -1.4311 \\ 4.2308 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0000021 \\ -0.0000011 \\ -0.0000056 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$x \approx \begin{pmatrix} -1.2340 \\ -1.4311 \\ 4.2308 \end{pmatrix}; \ r = \begin{pmatrix} -0.0000021 \\ -0.0000011 \\ -0.0000056 \end{pmatrix}$$