Задача с решением по численным методам
Тема: решение систем линейных алгебраических уравнений

ЗАДАНИЕ.

Решить систему линейных уравнений $Ax=b$ методом : c) Зейделя.

Итерационными методами решение задачи найти с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

УКАЗАНИЕ. Для выполнения достаточного условия сходимости воспользоваться перестановкой строк в исходной системе уравнений.

№	A				b
11	1	-2	16	0	31
	10	-1	0	1	0
	0	12	1	-1	-28
	0	2	0	16	29

РЕШЕНИЕ.

Для метода Зейделя сходимость имеет место, если модули диагональных элементов матрицы A заданной системы или для каждой строки превышают сумму модулей недиагональных элементов этой строки, или же для каждого столбца превышают сумму модулей недиагональных элементов этого столбца.

Переставив строки в исходной системе уравнений, получим:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 16 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ -28 \\ 31 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Проверим:

$$10 > 0 + 1 + 0$$
$$12 > |-1| + |-2| + 2$$
$$16 > 0 + 1 + 0$$
$$16 > 1 + |-1| + 1$$

Абсолютные величины диагональных элементов матрицы A заданной системы для каждого столбца превышают сумму абсолютных величин недиагональных элементов этого столбца, метод Зейделя сойдется.

Из i-ого уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 12x_2 + x_3 - x_4 = -28 \\ x_1 - 2x_2 + 16x_3 = 31 \\ 2x_2 + 16x_4 = 29 \end{cases}$$

выразим переменную x_i. Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_2 - 0.1x_4 \\ x_2 = -2.3333 - 0.0833x_3 + 0.0833x_4 \\ x_3 = 1.9375 - 0.0625x_1 + 0.125x_2 \\ x_4 = 1.8125 - 0.125x_2 \end{cases}$$

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k+1)$ –го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

В качестве начального приближения к решению выберем

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Критерием достижения заданной точности положим:

$$\max_i\left(\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right|\right) < \varepsilon$$

Покажем первый шаг алгоритма подробно:

$$x_1^0 = 0;\ x_2^0 = 0; x_3^0 = 0; x_4^0 = 0$$

Подставим эти значения в правую часть первого уравнения системы:

$$x_1^1 = 0.1x_2^0 - 0.1x_4^0 = 0.1 \cdot 0 - 0.1 \cdot 0 = 0$$

Затем найдем x_2^1:

$$x_2^1 = -2.3333 - 0.0833x_3^0 + 0.0833x_4^0 = -2.3333 - 0.0833 \cdot 0 + 0.0833 \cdot 0 = \\ = -2.3333$$

Затем найдем x_3^1 (используем при этом не x_1^0, x_2^0, как в методе простых итераций Якоби, а уже найденные приближения x_1^1, x_2^1):

$$x_3^1 = 1.9375 - 0.0625x_1^1 + 0.125x_2^1 = 1.9375 - 0.0625 \cdot 0 + 0.125 \cdot (-2.3333) = \\ = 1.64583$$

Затем найдем x_4^1 (используем при этом не x_2^0, как в методе простых итераций Якоби, а уже найденное приближение x_2^1):

$$x_4^1 = 1.8125 - 0.125x_2^1 = 1.8125 - 0.125 \cdot (-2.3333) = 2.10417$$

Получили первое приближение к решению:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.33333 \\ 1.64583 \\ 2.10417 \end{pmatrix}$$

Найдем:

$$d_1 = \left|x_1^{k+1} - x_1^k\right| = |0 - 0| = 0;\ \ d_2 = \left|x_1^{k+1} - x_1^k\right| = |-2.33333 - 0| = 2.33333;$$
$$d_3 = \left|x_3^{k+1} - x_3^k\right| = |1.64583 - 0| = 1.64583;\ \ d_4 = \left|x_4^{k+1} - x_4^k\right| = |2.10417 - 0| \\ = 2.10417;$$
$$\max_i\left(\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right|\right) = 2.33333 > 10^{-3}$$

Аналогичным образом проведем следующие итерации, пока не будет достигнута необходимая точность:

k	x_1	x_2	x_3	x_4	d_1	d_2	d_3	d_4	$\max d_i$
0	0	0	0	0					
1	0	-2,33333	1,64583	2,10417	0	2,33333	1,64583	2,10417	2,33333
2	-0,44375	-2,29514	1,67834	2,09939	0,44375	0,03819	0,03251	0,00477	0,44375
3	-0,43945	-2,29825	1,67769	2,09978	0,00430	0,00311	0,00066	0,00039	0,00430
4	-0,4398	-2,2982	1,6777	2,0998	0,00035	0,00009	0,00003	0,00001	0,00035

В итоге получим приближенное решение с точностью 10^{-3}:

$$x = \begin{pmatrix} -0.4398 \\ -2.2982 \\ 1.6777 \\ 2.0998 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$x = \begin{pmatrix} -0.4398 \\ -2.2982 \\ 1.6777 \\ 2.0998 \end{pmatrix}$$