Задача с решением по численным методам
Тема: погрешность функции, оценка погрешности

Задание.

Вычислить предельную погрешность функции и линейную оценку погрешности функции для значения x = x . Погрешность вычисления x принять равной: а) Δx = 0,1; б) Δx= 0,01. Сравнить результаты вычислений, сделать выводы.*

$\ln\dfrac{x+2}{x-3}$ $\qquad$ *x* = 3,2*

Решение.

А) Для вычисления $A\left(y^*\right)$ находим величины

$$y\left(x^*\right)=\left(\ln\frac{x+2}{x-3}\right)_{x=x^*=3.2}=\ln\frac{3.2+2}{3.2-3}=3.2581$$

$$y\left(x^*-\Delta x\right)=\left(\ln\frac{x+2}{x-3}\right)_{x=x^*=3.1}=\ln\frac{3.1+2}{3.1-3}=3.9318$$

$$y\left(x^*+\Delta x\right)=\left(\ln\frac{x+2}{x-3}\right)_{x=x^*=3.3}=\ln\frac{3.3+2}{3.3-3}=2.8717$$

Выясним, существует ли локальный экстремум функции на интервале $\left(x^*-\Delta x;x^*+\Delta x\right)=(3.1;3.3)$. Для этого воспользуемся условием экстремума

$$y'=\left(\ln\frac{x+2}{x-3}\right)'=\left(\ln(x+2)-\ln(x-3)\right)'=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}=\frac{x-3-x-2}{(x+2)(x-3)}=-\frac{5}{(x+2)(x-3)}$$

Данное уравнение не имеет корней при этом, для любого $x\in(3.1;3.3)$ получаем, что $y'(x)<0$, значит, $y(x)$ убывает при $x\in(3.1;3.3)$, значит, $y\left(x^*+\Delta x\right)<y(x)<y\left(x^*-\Delta x\right)$

Разлагая граничные значения полученной двухсторонней оценки в ряд Тейлора в окрестности точки $x=x^*$ и ограничиваясь в соответствующем разложении производной первого порядка, получим

$$y\left(x^*\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x^*}\Delta x<y(x)<y\left(x^*\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x^*}\Delta x \text{ или } \left|y(x)-y\left(x^*\right)\right|<\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x^*}\Delta x$$

Отсюда линейная составляющая погрешности исследуемой функции $A^0\left(y^*\right)$ на интервале $\left(x^*-\Delta x;x^*+\Delta x\right)=(3.1;3.3)$ равна

$$A^0\left(y^*\right)=\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x^*}\Delta x=\frac{5}{(x+2)(x-3)}\Delta x=\frac{5}{(3.2+2)(3.2-3)}0.1=0.4808,$$ а предельная абсолютная погрешность функции для заданных условии составляет величину

$$A\left(y^*\right)=A\left(y\left(x^*\right)\right)=A\left(y(x)\right)_{x\in\left(x^*-\Delta x;x^*+\Delta x\right)}=\max\left\{\left|y\left(x^*-\Delta x\right)-y\left(x^*\right)\right|,\left|y\left(x^*+\Delta x\right)-y\left(x^*\right)\right|\right\}=$$

$$=\max\left\{|3.9318-3.2581|,|2.8717-3.2581|\right\}=0.6737$$

Б)

Аналогично получаем для $\Delta x = 0.01$

$$y\left(x^*\right) = \left(\ln\frac{x+2}{x-3}\right)_{x=x^*=3.2} = \ln\frac{3.2+2}{3.2-3} = 3.2581$$

$$y\left(x^* - \Delta x\right) = \left(\ln\frac{x+2}{x-3}\right)_{x=x^*=3.19} = \ln\frac{3.19+2}{3.19-3} = 3.3075$$

$$y\left(x^* + \Delta x\right) = \left(\ln\frac{x+2}{x-3}\right)_{x=x^*=3.21} = \ln\frac{3.21+2}{3.21-3} = 3.2112$$

$$A^0\left(y^*\right) = \left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x^*} \Delta x = \frac{5}{(x+2)(x-3)}\Delta x = \frac{5}{(3.2+2)(3.2-3)}0.01 = 0.0481$$

$$A\left(y^*\right) = A\left(y\left(x^*\right)\right) = A\left(y(x)\right)_{x\in\left(x^*-\Delta x;x^*+\Delta x\right)} = \max\left\{\left|y\left(x^*-\Delta x\right) - y\left(x^*\right)\right|, \left|y\left(x^*+\Delta x\right) - y\left(x^*\right)\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{|3.3075 - 3.2581|, |3.2112 - 3.2581|\right\} = 0.0494$$