

Задача с решением по численным методам
Тема: графическое отделение корней и метод касательных

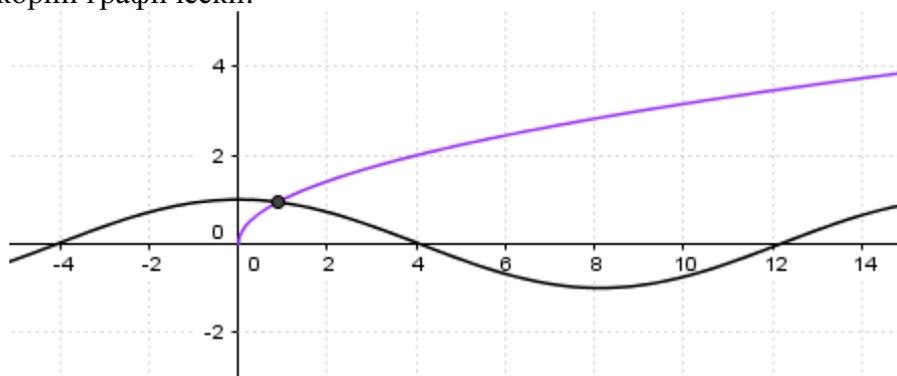
ЗАДАНИЕ.

Отделите корни уравнения графически и уточните один из них методом хорд с точностью до 0,001. Уточните один из корней этого уравнения методом касательных с точностью до 0,001.

$$\sqrt{x} - \cos 0.387x = 0$$

РЕШЕНИЕ.

1) Отделим корни графически:



Уравнение имеет один корень $x \in [0; 1.5]$.

Уточним корень **методом хорд** с точностью до 0,001.

$$f(x) = \sqrt{x} - \cos 0.387x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0.387 \sin 0.387x; \text{ при } 0 \leq x \leq 1.5: f'(x) > 0$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + 0.149769 \cos 0.387x; \text{ при } 0 \leq x \leq 0.5: f''(x) < 0$$

$$f'(x) \cdot f''(x) < 0$$

Первое приближение $x_0 = b = 1.5$,

$$x_n = a - \frac{f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)}(x_{n-1} - a)$$

$$f(a) = f(0) = \sqrt{0} - \cos 0 = -1$$

$$x_n = 0 - \frac{-1}{f(x_{n-1}) - (-1)}(x_{n-1} - 0) = \frac{1}{1 + f(x_{n-1})} \cdot x_{n-1}$$

В качестве оценки достижения заданной точности используем условие $|x_n - x_{n-1}| < 0.001$

i	x	$f(x)$	$\frac{1}{1 + f(x)}$	$ x_n - x_{n-1} $
0	1,5	0,388556	0,720172	
1	1,080259	0,125477	0,888512	0,419741
2	0,959823	0,047904	0,954286	0,120435
3	0,915946	0,01922	0,981142	0,043878

4	0,898673	0,007854	0,992207	0,017273
5	0,89167	0,003233	0,996778	0,007003
6	0,888796	0,001335	0,998667	0,002873
7	0,887612	0,000552	0,999449	0,001185
8	0,887122			0,000489

С заданной точностью получим: $x \approx 0.8871$

Уточним корень **методом касательных** с точностью до 0,001.

Известен интервал изоляции корня уравнения $[0; 1.5]$, в котором $f''(x)$ не меняет знак. В качестве начального приближения выберем тот конец интервала изоляции, для которого знаки $f(x)$ и $f''(x)$ совпадают, то есть $x_0 = 0$.

Формула для определения последующих приближений:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Остановка вычислений происходит при $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

$$f(x) = \sqrt{x} - \cos 0.387x; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0.387 \sin 0.387x$$

Чтобы избежать деления на ноль, в качестве начального приближения примем $x_0 = 0.01$.

i	x	$f(x)$	$f'(x)$	$ x_{i+1} - x_i $
0	0,01	-0,89999	5,001498	
1	0,189945	-0,56147	1,175668	0,179945
2	0,667523	-0,1498	0,710846	0,477578
3	0,878253	-0,00564	0,662549	0,210731
4	0,886768	-0,000006	0,661183	0,008515
5	0,886777			0,000009

С заданной точностью получим: $x \approx 0.8868$