

Задача с решением по численным методам
Тема: решение нелинейных уравнений

ЗАДАНИЕ.

Методом бисекции найти решение нелинейного уравнения на отрезке $[a, b]$ с точностью

$\varepsilon = 10^{-2}$. Выбрав полученное решение в качестве начального приближения, найти

решение уравнения методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Для метода простой итерации обосновать сходимость и оценить достаточное для достижения заданной точности число итераций.

№	Уравнение	$[a, b]$
11	$e^x = 1/\sqrt{x}$	$[0.3, 0.8]$

РЕШЕНИЕ.

Опишем идею метода бисекции.

Найдем середину отрезка $[a, b]$: $c = \frac{a+b}{2}$. Корень остался на одной из частей: $[a, c]$ или $[c, b]$. Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то корень попал на отрезок $[a, c]$, тогда деление отрезка можно повторить, приняв в качестве нового правого конца точку c (то есть на следующей итерации положить $b = c$). В противном случае корень попал на половину $[c, b]$, и необходимо изменить значение левого конца отрезка, при следующей итерации положив $a = c$. Поскольку корень всегда заключен внутри отрезка, итерационный процесс можно останавливать, если длина отрезка станет меньше заданной точности: $|b - a| < \varepsilon$.

Проделаем первый шаг описанного алгоритма:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0; \quad a = 0.3; \quad b = 0.8$$

$$c = \frac{0.3 + 0.8}{2} = 0.55$$

$$f(a) = e^{0.3} - \frac{1}{\sqrt{0.3}} \approx -0.47588;$$

$$f(c) = e^{0.55} - \frac{1}{\sqrt{0.55}} \approx 0.38485;$$

$$f(b) = e^{0.8} - \frac{1}{\sqrt{0.8}} \approx 1.10751$$

$f(a) \cdot f(c) < 0$, таким образом, корень попадает в отрезок $[a; c] = [0.3; 0.55]$, и в следующей итерации нужно положить $b = c = 0.55$.

Остальные расчеты представим в таблице:

a_i	$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$	$ b_i - a_i $
0,3	0,55	0,8	-0,47588	0,38485	1,10751	0,5
0,3	0,425	0,55	-0,47588	-0,00434	0,38485	0,25
0,425	0,4875	0,55	-0,00434	0,19601	0,38485	0,125

0,425	0,45625	0,4875	-0,00434	0,09768	0,19601	0,0625
0,425	0,44063	0,45625	-0,00434	0,04719	0,09768	0,03125
0,425	0,43281	0,44063	-0,00434	0,02156	0,04719	0,01563
0,425	0,42891	0,43281	-0,00434	0,00865	0,02156	0,00781

Как видно из таблицы, после седьмой итерации становится известно, что корень заданного уравнения принадлежит отрезку $[0.425; 0.43281]$, длина которого 0.00781, что меньше $\varepsilon = 0.01$. Таким образом, с заданной точностью в качестве искомого корня можно принять середину найденного отрезка:

$$x_0 \approx 0.42891$$

Опишем метод простой итерации.

Запишем уравнение $f(x) = 0$ в виде $x = \varphi(x)$. Пусть имеется начальное приближение к корню $x = x_0$. Подставим его в правую часть уравнения $x = \varphi(x)$ и получим новое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$, затем аналогичным образом получим $x_2 = \varphi(x_1)$. и т.д.,

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Считаем, что корень найден, если $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$, где ε - заданная погрешность.

Необходимо установить, при каких условиях описанный итерационный процесс будет сходиться к корню уравнения x^* . Пусть в итерационной формуле $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$x_k = x^* + \varepsilon_k; x_{k+1} = x^* + \varepsilon_{k+1}$$

где ε - отклонения k -го и $k + 1$ -го приближений от корня.

Если процесс уточнения осуществляется вблизи корня x^* , то функцию $\varphi(x)$ можно приближенно представить двумя членами ряда Тейлора. Тогда формула $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ примет вид:

$$x^* + \varepsilon_{k+1} \cong \varphi(x^*) + \varepsilon_k \varphi'(x^*)$$

Так как x^* - корень уравнения, то $x^* = \varphi(x^*)$ и, следовательно,

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \varphi'(x^*)$$

Для того, чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо выполнение условия $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, что возможно лишь когда $|\varphi'(x)| < 1$.

Преобразуем заданное уравнение:

$$e^x = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$x = e^{-2x}$$

Итак, $\varphi(x) = e^{-2x}$; $\varphi'(x) = -2e^{-2x}$

С помощью метода бисекции ранее было определено, что начальное приближение $x_0 = 0.42891$ принадлежит отрезку $[0.425; 0.43281]$.

$$0.425 < x < 0.43281$$

$$-2 \cdot 0.43281 < -2x < -2 \cdot 0.425$$

Так как функция $-2e^{-2x}$ монотонно возрастает, то

$$e^{-2 \cdot 0.43281} < e^{-2x} < e^{-2 \cdot 0.425}$$

$$-2e^{-2 \cdot 0.425} < -2e^{-2x} < -2e^{-2 \cdot 0.43281}$$

$$-0.85483 < -2e^{-2x} < -0.84158$$

Таким образом,

$$|\varphi'(x)| = |-2e^{-2x}| < 0.85483 < 1$$

Это означает, что итерационный процесс $x_{k+1} = e^{-2x_k}$ сходится к корню x^* .

Так как $|\varphi'(x)| < 0.85483$, можно сказать, что итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = 0.85483$. Исходя из этого, оценим количество итераций, требующихся для достижения заданной точности. Найдем, начиная с какого значения n будет выполняться:

$$|b_{n+1} - b_n| = |x_0 \cdot q^{n+1} - x_0 \cdot q^n| < \varepsilon$$

$$|x_0 \cdot q^n (q - 1)| < \varepsilon$$

$$q^n < \frac{\varepsilon}{x_0(1 - q)}$$

$$n > \log_q \frac{\varepsilon}{x_0(1 - q)} = \log_{0.85483} \frac{10^{-4}}{0.42891(1 - 0.85483)} \approx 41$$

Следует заметить, что эта оценка как правило завышена и на практике используется редко.

Проведем вычисления, на каждой итерации вычисляя $|x_{k+1} - x_k|$

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$ x_{k+1} - x_k $
0	0,42891	0,424089	
1	0,424089	0,428195	0,0041058 > ε
2	0,428195	0,424693	0,0035018 > ε
3	0,424693	0,427678	0,0029848 > ε
4	0,427678	0,425132	0,0025455 > ε
5	0,425132	0,427302	0,0021698 > ε
6	0,427302	0,425452	0,0018503 > ε
7	0,425452	0,427029	0,0015774 > ε
8	0,427029	0,425684	0,0013450 > ε
9	0,425684	0,426831	0,0011467 > ε
10	0,426831	0,425853	0,0009777 > ε
11	0,425853	0,426686	0,0008336 > ε
12	0,426686	0,425976	0,0007108 > ε
13	0,425976	0,426582	0,0006060 > ε
14	0,426582	0,426065	0,0005167 > ε
15	0,426065	0,426506	0,0004405 > ε
16	0,426506	0,42613	0,0003756 > ε
17	0,42613	0,42645	0,0003202 > ε
18	0,42645	0,426177	0,0002730 > ε
19	0,426177	0,42641	0,0002328 > ε
20	0,42641	0,426211	0,0001985 > ε
21	0,426211	0,426381	0,0001692 > ε
22	0,426381	0,426236	0,0001443 > ε
23	0,426236	0,426359	0,0001230 > ε
24	0,426359	0,426254	0,0001049 > ε
25	0,426254	0,426344	0,0000894 < ε

Итак, после 25 итераций получили 0.426344

С точностью до 10^{-4} , искомый корень: $x = 0.42634$. Видно, что в действительности потребовалось существенно меньше итераций, чем в априорной оценке.

Ответ. а) начальное приближение $x_0 = 0.42891$ принадлежит отрезку $[0.425; 0.43281]$;
б) $x = 0.42634$