Задача с решением по численным методам
Тема: приближенное вычисление интеграла разными методами, сравнение точности и погрешностей

Задание.

Для функции $f(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$, *приближённо вычислить определённый интеграл на отрезке* $[2;8]$ *точно, по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона при* $n=12$ *разбиении отрезка интегрирования. Вычислить абсолютную и относительную погрешность.*

Решение.

Вычислим точное значение функции

$$I=\int_2^8 f(x)\,dx=\int_2^8 \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx=\int_2^8 \frac{d(2+\sin x)}{2+\sin x}=\left[\ln|2+\sin x|\right]_2^8=$$

$$=\ln|2+\sin 8|-\ln|2+\sin 2|=\ln\left|\frac{2+\sin 8}{2+\sin 2}\right|\approx 0.0271.$$

Протабулируем функцию на отрезке $[2;8]$ с шагом $h=\dfrac{8-2}{12}=0.5$

i	x_i	y_i
0	2,0	-0,1430
1	2,5	-0,3083
2	3,0	-0,4624
3	3,5	-0,5678
4	4,0	-0,5258
5	4,5	-0,2062
6	5,0	0,2725
7	5,5	0,5475
8	6,0	0,5580
9	6,5	0,4409
10	7,0	0,2837
11	7,5	0,1180
12	8,0	-0,0487
Сумма Σ		-0,0416

Применим формулу правых прямоугольников $\int_a^b f(x)\,dx=h(f_1+...+f_{12})=h\left(\sum f-f_0\right)$

Значит, $I_1\approx 0.5*(-0.0416+0.0487)=0.0036$

Применим формулу трапеции $\int_a^b f(x)\,dx=h\left(\sum f-\dfrac{f_0+f_{12}}{2}\right)$

Значит, $I_2 \approx 0.5*\left(-0.0416-\frac{-0.1430-0.0487}{2}\right)=0.0272$

Применим формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left(f_0+2\left(f_1+f_3+f_5+f_7+f_9+f_{11}\right)+4\left(f_2+f_4+f_6+f_8+f_{10}\right)+f_{12}\right)$$

и составим таблицу

x	y	Коэффициент	
2,0	-0,1430	1	-0,1430
2,5	-0,3083	2	-0,6166
3,0	-0,4624	4	-1,8495
3,5	-0,5678	2	-1,1356
4,0	-0,5258	4	-2,1031
4,5	-0,2062	2	-0,4123
5,0	0,2725	4	1,0899
5,5	0,5475	2	1,0949
6,0	0,5580	4	2,2322
6,5	0,4409	2	0,8817
7,0	0,2837	4	1,1350
7,5	0,1180	2	0,2360
8,0	-0,0487	1	-0,0487
Сумма			0,1626

Значит, $I_3 \approx \frac{\frac{1}{2}}{3}*0.1626=0.0271$

Вычислим абсолютные и относительные погрешности

$$\Delta_1=\left|I_1-I\right|=\left|0.0036-0.0271\right|=0.0235;\varepsilon_1=\frac{\Delta_1}{|I|}=\frac{0.0235}{0.0271}*100\%\approx 85\%$$

$$\Delta_2=\left|I_2-I\right|=\left|0.0272-0.0271\right|\approx 0.0001;\varepsilon_2=\frac{\Delta_2}{|I|}=\frac{0.0001}{0.0271}*100\%=0.36\%$$

$$\Delta_3=\left|I_3-I\right|=\left|0.0271-0.0271\right|\approx 0;\varepsilon_3=\frac{\Delta_3}{|I|}\approx 0\%$$

Получаем, что метод прямоугольников дает погрешность 85% (связано с выбором интервала и шага интегрирования), а метод трапеции и Симпсона дают практически точные решения даже при таком количестве разбиения