Задача скачана с https://www.matburo.ru/ (еще много бесплатных примеров на сайте)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Задача с решением по численным методам
Тема: численное вычисление интегралов

ЗАДАНИЕ.

Вычислить интеграл $\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx$, *используя квадратурные формулы:*

а) центральных прямоугольников с шагом $h = 0.4$ *; дать априорную оценку погрешности;*
б) трапеций с шагами $h = 0.4$ *и* $h = 0.2$ *; оценить погрешность результата по формуле Рунге и уточнить результат по Рунге;*
в) Симпсона с шагом $h = 0.4$.
Промежуточные результаты вычислять с шестью значащими цифрами. Аргументы тригонометрических функций вычислять в радианах.

РЕШЕНИЕ.

а)

$$f(x) = e^{-\frac{0.1}{x}}$$

Формула центральных (средних) прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Для априорной оценки погрешности вычисления воспользуемся формулой:

$$|I - I_{\text{пр}}| \le \frac{M}{24}(b-a)h^2;\;\; M = \max_{[a;b]}|f''(x)|$$

$$f' = \left(e^{-\frac{0.1}{x}}\right)' = e^{-\frac{0.1}{x}}\left(-\frac{0.1}{x}\right)' = \frac{0.1}{x^2}e^{-\frac{0.1}{x}}$$

$$f'' = \left(\frac{0.1}{x^2}e^{-\frac{0.1}{x}}\right)' = \left(\frac{0.1}{x^2}\right)' e^{-\frac{0.1}{x}} + \frac{0.1}{x^2}e^{-\frac{0.1}{x}}\left(-\frac{0.1}{x}\right)' = -\frac{0.2}{x^3}e^{-\frac{0.1}{x}} + \left(\frac{0.1}{x^2}\right)^2 e^{-\frac{0.1}{x}} =$$
$$= e^{-\frac{0.1}{x}}\left(\frac{0.01}{x^4} - \frac{0.2}{x^3}\right)$$

Эта функция монотонно возрастает на [1; 2.4], поэтому на [1; 2.4]

$$f''(1) \le f''(x) \le f''(2{,}4)$$
$$f''(1) \approx -0.171919; f''(2.4) \approx -0.013588$$
$$M = \max_{[a;b]}|f''(x)| < 0.172$$

$$|I - I_{\text{пр}}| \le \frac{M}{24}(b-a)h^2 < \frac{0.172\cdot(2.6-1)\cdot 0.4^3}{24} \approx 0.001835$$

Таким образом, погрешность:

$$|I - I_{\text{пр}}| < 0.002$$

Разобьем отрезок [1.0; 2.6] на отрезки длины $h = 0.4$ точками $x_0 = 1.0; x_1 = 1.0 + 0.4 = 1.4; x_2 = 1.4 + 0.4 = 1.8; x_3 = 1.8 + 0.4 = 2.2; x_4 = 2.2 + 0.4 = 2.6.$

Задача скачана с https://www.matburo.ru/ (еще много бесплатных примеров на сайте)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Для каждого отрезка найдем середину (середина i - ого отрезка - точка $\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$) и значение функции в середине отрезка:

i	x_i	$x_i - \frac{h}{2}$	$f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$
0	1		
1	1,4	1,2	0,920044
2	1,8	1,6	0,939413
3	2,2	2	0,951229
4	2,6	2,4	0,959189
		Сумма	3,769876

$$I_{\text{пр}} = 0.4 \cdot 3.769876 = 1.507951$$

б)
<u>Формула трапеций.</u>

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Проведем вычисления для шага $h_1 = 0.4$

i	x_i	$f(x_i)$	
0	1	0,904837	
1	1,4		0,931063
2	1,8		0,945959
3	2,2		0,955563
4	2,6	0,962269	
	Сумма	1,867106	2,832585

$$I_{\text{тр.}}^{0.4} = 0.4\left(\frac{1.867106}{2} + 2.832585\right) = 1.506455$$

Проведем вычисления для шага $h_2 = 0.2$

i	x_i	$f(x_i)$	
0	1	0,904837	
1	1,2		0,920044
2	1,4		0,931063
3	1,6		0,939413
4	1,8		0,945959
5	2		0,951229
6	2,2		0,955563
7	2,4		0,959189
8	2,6	0,962269	
	Сумма	1,867106	6,602462

Задача скачана с https://www.matburo.ru/ (еще много бесплатных примеров на сайте)
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$I_{\text{тр.}}^{0.2} = 0.2\left(\frac{1.867106}{2} + 6.602462\right) = 1.507203$$

Погрешность вычисления интеграла при числе шагов $2n$, определяется по формуле Рунге: $\Delta_{2n} = \frac{1}{3}|I_{2n} - I_n|$ для формул прямоугольников и трапеций

$$\Delta_{2n} = \frac{1}{3}|I_{2n} - I_n| = \frac{1}{3}|1.507203 - 1.506455| = 0.000249$$

Уточним по правилу Рунге:

$$I \approx \frac{I_{\text{тр.}}^{0.2} - I_{\text{тр.}}^{0.4}}{2^p - 1} + I_{\text{тр.}}^{0.2} = \frac{1.507203 - 1.506455}{2^2 - 1} + 1.507203 \approx 1.507452$$

в)

Формула Симпсона.

Если интервал интегрирования разбит на $2N$ равных частей,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + f_{2N})$$

i	x_i	$f(x_i)$		
0	1	0,904837		
1	1,4		0,931063	
2	1,8			0,945959
3	2,2		0,955563	
4	2,6	0,962269		
	Сумма	1,867106	1,886626	0,945959

$$I_C = \frac{2.6 - 1}{6 \cdot 2}(1.867106 + 4 \cdot 1.886626 + 2 \cdot 0.945959) = 1.507404$$

Ответ.

Формула прямоугольников	Формула трапеций	Формула Симпсона
$I_{\text{пр}} = 1.507951$ $\lvert I - I_{\text{пр}}\rvert < 0.001835$	$I_{\text{тр.}}^{0.4} = 1.506455$ $I_{\text{тр.}}^{0.2} = 1.507203$ $\Delta_{2n} = 0.000249$ $I_{\text{уточн}} = 1.507452$	$I_C = 1.507404$