

**Пример решения задачи:
Сведение двойного интеграла к однократному**

ЗАДАНИЕ.

Свести к однократному интегралу

$$\iint_{x^2+y^2 \leq x} x f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$$

РЕШЕНИЕ.

Сделаем замену координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Якобиан такой замены $J = r$.

Уравнение $x^2 + y^2 = x$ примет вид:

$$r^2 = r \cos \varphi; \quad r = \cos \varphi$$

Область интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq \cos \varphi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq x} x f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cos \varphi f(r) \cdot r dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^2 f(r) \cos \varphi dr \end{aligned}$$

Изменим порядок интегрирования. Область интегрирования:

$$\begin{cases} -\arccos r \leq \varphi \leq \arccos r \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq x} x f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^2 f(r) \cos \varphi dr = \\ &= \int_0^1 dr \int_{-\arccos r}^{\arccos r} r^2 f(r) \cos \varphi d\varphi = \int_0^1 r^2 f(r) \left(\sin \varphi \Big|_{-\arccos r}^{\arccos r} \right) dr = \\ &= \int_0^1 r^2 f(r) (\sin(\arccos r) - \sin(-\arccos r)) dr = \int_0^1 r^2 f(r) \cdot 2 \sin(\arccos r) dr \\ &= \end{aligned}$$

Решение задачи по двойным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma2int

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$= \int_0^1 2r^2 f(r) \sqrt{1-r^2} dr$$

ОТВЕТ.

$$\int_0^1 2r^2 f(r) \sqrt{1-r^2} dr$$