

**Пример решения задачи:
Двойной интеграл в полярных координатах**

ЗАДАНИЕ.

Вычислить с помощью перехода к полярным координатам двойной интеграл по указанной области D .

$$\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D - \text{кольцо } 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2.$$

РЕШЕНИЕ.

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Тогда $dx dy = r dr d\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_D \frac{\ln(r^2)}{r^2} r dr d\varphi = 2 \iint_D \frac{\ln(r)}{r} dr d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^e \frac{\ln(r)}{r} dr = \\ &= 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \int_1^e \ln(r) d(\ln(r)) = 2\pi \ln^2(r) \Big|_1^e = 2\pi (\ln^2(e) - \ln^2(1)) = 2\pi. \end{aligned}$$