Пример решения задачи:
Изменение порядка интегрирования

Задание.

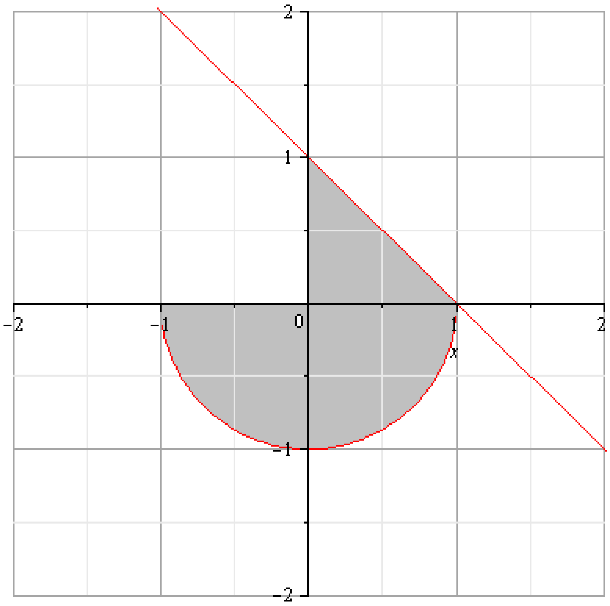
Изменить порядок интегрирования. Нарисовать область интегрирования и вычислить двойной интеграл двумя способами.

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} xdy$$

Решение.

Область интегрирования:

$$D: \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le 1-x \end{cases}$$



Изменим порядок интегрирования. Запишем область D следующим образом:

$$D: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1-y \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xdx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1-y} xdx$$

Вычислим интеграл обоими способами:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} xdy$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(xy \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(xy \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x\sqrt{1-x^2} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(x\left(1-x+\sqrt{1-x^2}\right)\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \left(-2x\sqrt{1-x^2}\right) dx + \int_{0}^{1} (x-x^2)dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \left(-2x\sqrt{1-x^2}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}d(1-x^2) + \int_{0}^{1} (x-x^2)dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}d(1-x^2) =$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left((1-0)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left((1-1)^{\frac{3}{2}} - (1-0)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Второй способ

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xdx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1-y} xdx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \right) dy + \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2 \Big|_{0}^{1-y} \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}\left((1-y^2)-(1-y^2)\right) \right) dy + \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2}(1-y)^2 \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{0} 0dy + \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2} - y + \frac{1}{2}y^2 \right) dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 \right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Ответ.

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} xdy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xdx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1-y} xdx = \frac{1}{6}$$