

Пример решения задачи: Изменение порядка интегрирования

ЗАДАНИЕ.

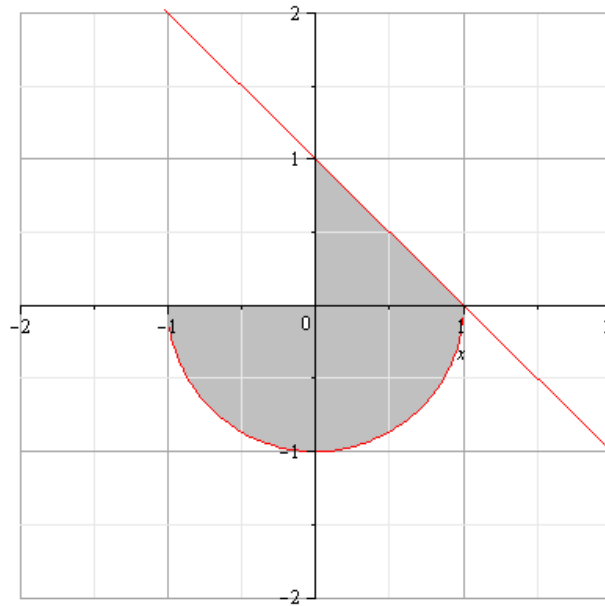
Изменить порядок интегрирования. Нарисовать область интегрирования и вычислить двойной интеграл двумя способами.

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 x dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} x dy$$

РЕШЕНИЕ.

Область интегрирования:

$$D: \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1-x \end{array} \right\}$$



Изменим порядок интегрирования. Запишем область D следующим образом:

$$D: \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq y \leq 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1-y \end{array} \right\}$$

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} x dx$$

Вычислим интеграл обоими способами:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 x dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} x dy \\
 &= \int_{-1}^0 \left(xy \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \right) dx + \int_0^1 \left(xy \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} \right) dx = \\
 &= \int_{-1}^0 (x\sqrt{1-x^2}) dx + \int_0^1 (x(1-x+\sqrt{1-x^2})) dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 (-2x\sqrt{1-x^2}) dx + \int_0^1 (x-x^2) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (-2x\sqrt{1-x^2}) dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) + \int_0^1 (x-x^2) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \\
 &= -\frac{1}{3} \left((1-0)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \left((1-1)^{\frac{3}{2}} - (1-0)^{\frac{3}{2}} \right) = \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Второй способ

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} x dx \\
 &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \right) dy + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{1-y} \right) dy = \\
 &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} ((1-y^2) - (1-y^2)) \right) dy + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (1-y)^2 \right) dy \\
 &= \int_{-1}^0 0 dy + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} y^2 \right) dy = \\
 &= \left(\frac{1}{2} y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Решение задачи по двойным интегралам скачано с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma2int

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Ответ.

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 x dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} x dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} x dx = \frac{1}{6}$$